CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS

COLEGIADO DE MATEMÁTICA

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

UNIOESTE – CAMPUS CASCAVEL

ADRIAN ZANARDI

ALEXSANDRO ANDRE ALVES DE FREITAS

MÁRCIO ROCHA

MEIRIELLY FERNANDES DE LIMA

RELATÓRIO DA DISCIPLINA DE METODOLOGIA E PRÁTICA DE ENSINO DE MATEMÁTICA:

ESTÁGIO SUPERVISIONADO I

PROMAT

CASCAVEL

2022

ADRIAN ZANARDI

ALEXSANDRO ANDRE ALVES DE FREITAS

MÁRCIO ROCHA

MEIRIELLY FERNANDES DE LIMA

RELATÓRIO DA DISCIPLINA DE METODOLOGIA E PRÁTICA DE ENSINO DE MATEMÁTICA:

ESTÁGIO SUPERVISIONADO I

PROMAT

Relatório apresentado como requisito parcial para aprovação na disciplina de metodologia e prática de ensino de matemática.

Orientadora: Profª. Francieli Cristina Agostinetto Antunes.

CASCAVEL

2022

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.

Este trabalho é um relatório das ações desenvolvidas na disciplina de Metodologia e Prática de Matemática - Estágio Supervisionado I, ofertada no terceiro ano do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste Campus Cascavel). Nele estão presentes os planos de aula e os relatórios de cada encontro do programa Promat - Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um enfoque à Área de Matemática. Estão postas aqui também, descrição das metodologias utilizadas para o ensino e descrição de algumas vivências do grupo durante o período de desenvolvimento do projeto.

Os conteúdos trabalhados com os alunos inscritos no Promat foram organizados em dez encontros. No primeiro encontro, foi trabalhado o conteúdo de frações, onde foram retomadas aplicações de matemática básica. Em seguida, foram tratados os seguintes conteúdos: Trigonometria; Probabilidade; Matemática financeira; Estatística; Geometria plana e espacial; Funções de primeiro e segundo grau; Análise Combinatória e atividades que desenvolvem o raciocínio lógico. Em todos os encontros fornecemos lista de exercícios envolvendo os conteúdos trabalhados para que os estudantes complementassem os estudos em casa.

Durante os encontros procuramos trabalhar com jogos, materiais manipulativos e dinâmicas em grupos. Isso se deu ao percebermos que a socialização proporcionava uma melhor aprendizagem e desenvolvimento dos alunos. Além disso, a utilização de recursos tecnológicos viabilizou que propriedades e definições fossem projetadas durante as aulas, otimizando o tempo. O uso do *software* Geogebra contribuiu para que os alunos entendessem os conteúdos envolvendo funções e interpretação de gráficos.

Como objetivo geral, tínhamos a intenção de proporcionar um ambiente colaborativo e de interação social, visto que esperávamos alunos interessados em aprender, já que se inscreveram no projeto voluntariamente. Tínhamos o desejo que os encontros fossem esclarecedores e que promovesse a consolidação dos conhecimentos dos participantes.

Sendo um programa que poderia nos oferecer uma prática como docentes, também esperávamos adquirir experiência em sala de aula e dar os primeiros passos na função docente, o que ocorreu de fato. Nossas expectativas eram de aprender uns com os outros através do trabalho em equipe e com a supervisão e aconselhamentos de nossa orientadora. Esperávamos que a oportunidade de testar metodologias e práticas diferentes e, através de retornos, sempre melhorar nosso desempenho poderia ser um começo promissor para nosso aprendizado como futuros professores.

2. PROMAT.

O projeto Promat é executado na Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Unioeste, no Campus de Cascavel. Nele são ofertados conteúdos de Matemática da Educação Básica exigidos principalmente no Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM e em outros processos seletivos, objetivando relembrar conceitos matemáticos elementares que porventura não tenham sido abstraídos de forma clara na escola.

As aulas foram ministradas por nós, alunos estagiários do Curso de Licenciatura em Matemática, sob a supervisão e orientação dos professores do Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática. As aulas ocorreram aos sábados de manhã, totalizando dez encontros de quatro horas cada. Foram atendidos alunos das três séries do Ensino Médio da rede pública de ensino oriundos da cidade de Cascavel e região, bem como alunos ingressantes no curso de Matemática e de outros cursos da Unioeste.

Durante os dez encontros do Promat, trabalhamos com conteúdos de Matemática do Ensino Médio, enfocando problemas dos vestibulares e do ENEM, já que um dos nossos objetivos era preparar os alunos para essas avaliações, sanar suas dúvidas e despertar o gosto pela Matemática.

O projeto foi uma experiência importante para todos os participantes, tanto para os alunos que visavam ampliar seus conhecimentos quanto para nós estagiários que visávamos ampliar nossas experiências e necessitávamos da prática para nos prepararmos para a função docente.

3. A MATEMÁTICA FINANCEIRA E SUA IMPORTÂNCIA PARA ALUNOS DO ENSINO MÉDIO.

A matemática financeira surgiu em tempos que remontam às primeiras trocas diretas de mercadorias, prática conhecida como escambo e ao uso de um sistema estável de trocas de maneira equivalente e justa, logo fez-se necessário que vários povos e culturas adotassem seu próprio padrão comercial.

As moedas como conhecemos hoje surgiram quando o homem aprendeu a manusear o metal e, ao longo das épocas em que o comércio se expandiu mundialmente e, diante disso, estabelecer relações entre moedas de outros países acabou pela criação do "padrão ouro". Comerciantes por todo o mundo interessaram-se em adquirir riquezas, e por isso iniciaram-se trocas ou câmbio de dinheiro. Além disso, esses mesmos comerciantes passaram a guardar e a emprestar quantias de dinheiro, desde que devolvidas em um prazo determinado e junto a uma quantia adicional, o juro. "Assim, ficaram caracterizadas, ainda que de uma forma bastante rudimentar, o que seriam as primeiras operações de crédito" (GRANDO; SCHNEIDER, 2010, p. 48).

Os primeiros indícios de bancos deram-se com os sacerdotes de povos antigos, como os egípcios e babilônios e, mais tarde, com a Igreja Católica. Porém a instituição religiosa não suportou o avanço do mercado financeiro, o que exigia uma maior rede, visto que as grandes navegações e a 'descoberta' do Novo Mundo expandiu ainda mais as possibilidades de transações financeiras, como o uso da conta corrente e letras de câmbio.

O desenvolvimento da atividade comercial ao longo da história ocorreu a partir do ensino de uma matemática financeira e comercial, voltada às mudanças que aconteciam, com modelos propostos por diversos autores. Grando e Schneider (2010, p. 51) relatam a necessidade de uma evolução de como ensinar as questões financeiras e comerciais por meio da matemática:

> Portanto, a aritmética foi a precursora nos cálculos dos problemas nas relações comerciais de vários povos, evoluindo mais tarde para o uso da álgebra (fórmulas ou modelos matemáticos) e teve a sua contribuição importante na forma como hoje são resolvidas as questões da matemática comercial e financeira (Grando e Schneider, 2010, p. 51).

Dada a construção e caracterização de como a matemática financeira fez-se por anos, transpassando muitas vezes pelas mudanças e evoluções do comércio, julgamos seu ensino e aprendizagem importantes às pessoas, de modo que estejam cientes de como agir perante os cenários que hoje podemos nos deparar e tomar boas decisões em sua vida financeira. De acordo com Leal e Nascimento (2008, p. 5), “É preciso saber como utilizar o dinheiro, bem como aproveitar-se das ferramentas financeiras que o mercado oferece, pode possibilitar ao aluno uma melhor saúde financeira e uma vida mais estável”.

Grando e Schneider (2010, p. 52) reforçam essa ideia dizendo que:

> Atualmente, a matemática está presente em todos os níveis da educação básica e não se pode relegar ao segundo plano sua importância para a compreensão das relações econômicas e financeiras atuais. Desse modo, a apropriação dos significados dos conceitos da área da matemática financeira é fundamental.

Acreditamos que a matemática aplicada à Educação Financeira tem um grande aspecto positivo de se trabalhar com os alunos dado a sua aplicabilidade no cotidiano, e uma aula de Educação Financeira pode proporcionar uma vida financeira mais regrada e consciente. Portanto, aos alunos que se inscreveram no Promat, planejamos um encontro para abordar esse tema dada sua importância. Através de uma aula interativa, esperávamos que muitos dos conceitos da Matemática Financeira como porcentagem, juros simples e composto, tornassem mais compreensíveis aos alunos e que pudessem ajudá-los futuramente em sua vida financeira.

Os assuntos referentes à Matemática Financeira são importantes como orientação feita na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) que tem como objetivo garantir o desenvolvimento de habilidades específicas. Na base comum curricular de matemática e suas tecnologias no ensino médio (Brasil, 2018, p.532): competências específicas e habilidades, competência específica 1 diz:

> Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

Partindo dessa premissa, planejamos a aula solicitando que os alunos dividissem seus gastos em grupos: contas essenciais, contas fixas, alimentação, lazer e dinheiro poupado. Pedimos, então, que eles separassem cada grupo de gastos em percentual para que no final cada um tivesse a visão da divisão em relação ao todo. Exemplo: 20% em contas essenciais, 30% em alimentação, 10% em contas fixas, 25 % em lazer, 10% em transporte e 5% poupado ou investido.

A atividade despertou a curiosidade por parte da turma, que se engajou a separar os gastos e entender em qual parte comprometia a maior fatia da sua renda. Após o momento de reflexão sobre os gastos, apresentamos um método de divisão 70/30, ou seja, 70% do valor ganho destinado a gastos para o presente e 30% para o futuro.

- 70% da receita para os gastos fixos;
- 10% da receita para um plano de Independência Financeira;
- 20% dividir em metas;

- M1: o que vou consumir nos próximos dias, até 3 meses;
- M2: tudo que quiser entre três meses e seis meses;
- M3: o que deseja alcançar entre seis meses e um ano;
- M4: Objetivos a serem alcançados entre um ano e cinco anos.
- M5: Metas para mais de cinco anos.

Para introduzirmos juros simples e compostos, apresentamos uma atividade em que os alunos teriam de calcular o rendimento de três pessoas diferentes, pessoa A, B e C.

Tabela 1 – Juros e rendimentos.

	Pessoa A	Pessoa B	Pessoa C
Dinheiro investido	R$12.000	R$12.000	R$12.000
Valor ganho em juros	R$0	R$4.389,79	R$6.971,87
Total bruto	R$12.000	R$16.389,79	R$18.971,87

Fonte: Os autores. Criada em 18 nov. 2022.

A partir da atividade, conseguimos demonstrar a diferença entre os juros simples e composto.

Juros simples:

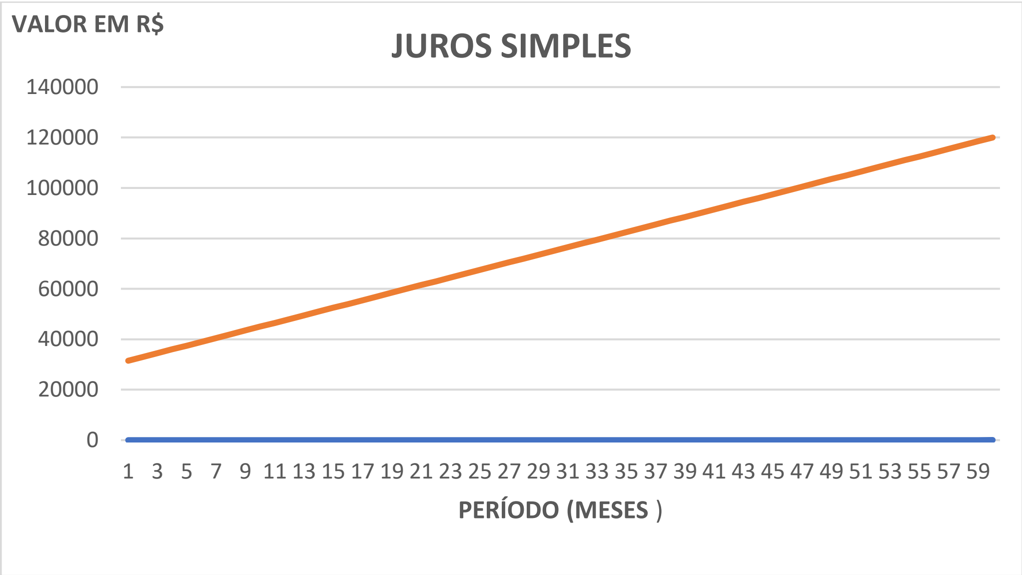
$$J = C.i.t$$

$$J = juros\ simples;\ C = capital\ inicial;\ i = taxa\ de\ juros;\ t = tempo\ da\ aplicação.$$

$$M = C + J$$

$$M = Montante$$

Figura 1 - Juros simples.



Fonte: Os autores. Criada em 18 nov. 2022

Juros compostos.

$$M = C(1 + i)^t$$

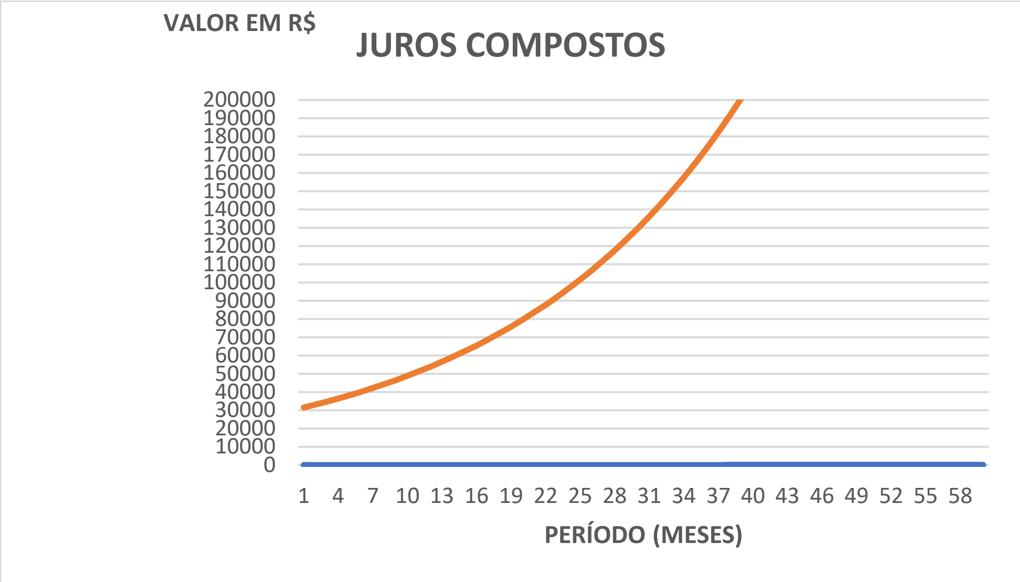
$$M\ é\ o\ montante\ acumulado, o\ total\ da\ aplicação;$$

$$C\ é\ o\ capital\ investido;$$

$$i\ é\ a\ taxa\ de\ juros;$$

$$t\ é\ o\ período\ de\ tempo.$$

Figura 2 - Juros compostos.



Fonte: Os autores. Criada em 18 nov. 2022

Percebemos que apresentar a Matemática Financeira por meio de situações cotidianas promoveu engajamento e participação dos alunos. Com isso, notamos que a aula foi mais produtiva e tivemos mais acertos por parte dos discentes nas situações-problemas propostas. Além disso, a aula proposta foi orientada de forma análoga das anteriores, o que facilitou a condução desse encontro, pois estávamos mais familiarizados em como trabalhar o conteúdo.

Referências

BNCC, Base Nacional Curricular Comum (PCN's). **Ensino médio. Brasília: MEC, 2018**. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br. Acesso em: 08 fev. 2023. Citado na página 532.

GOUVEIA, Rosimar. **Juros compostos**. Disponível em: https://www.todamateria.com.br/exercicios-de-juros-compostos/. Acesso em: 16 nov. 2022.

GRANDO, Neiva Ignês; SCHNEIDER, Ido José. **Matemática financeira: alguns elementos históricos e contemporâneos**. ZETETIKÉ - Unicamp, Passo Fundo, RS, vol. 18, nº 33, jan./jun. 2010, p. 43-62.

LEAL, Cícero Pereira; NASCIMENTO, José Antonio Rodrigues do. **Planejamento financeiro pessoal**. Brasília, 2008.

LUIZ, Robson. "**Matemática financeira**"; Brasil Escola. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/matematica-financeira.htm. Acesso em 16 de novembro de 2022.

OLIVEIRA, Raul Rodrigues de. **"Juro simples**"; Brasil Escola. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/juros-simples.htm. Acesso em 18 de novembro de 2022.

4. CRONOGRAMA DE CONTEÚDOS DO PROMAT.

O quadro a seguir apresenta os conteúdos trabalhados durante os dez encontros do Promat, ocorrido entre os dias oito de outubro e dez de dezembro de 2022.

Quadro 1 – Cronograma.

Encontro	**Data**	**Conteúdo**
1	08/10	Frações; Número decimais; Razão e proporção.
2	15/10	Equações, funções e sistemas do 1º grau.
3	22/10	Função afim.
4	29/10	Equações e funções do segundo grau.
5	05/11	Geometria do triângulo.
6	12/11	Geometria plana e espacial.
7	19/11	Matemática financeira.
8	26/11	Estatística.
9	03/12	Probabilidade e análise combinatória.
10	10/12	Raciocínio lógico.

Não foram necessárias fazer trocas de conteúdos e o cronograma foi cumprido como planejado.

5. ENCONTRO I.

5.1. PLANO DE AULA - ENCONTRO I - 08/10/2022.

Público-alvo: Alunos do 3º ano do Ensino Médio da rede pública estadual do Paraná.

Estagiários: Adrian Zanardi, Alexsandro Andre Alves de Freitas, Márcio Rocha e Meirielly Fernandes de Lima.

Conteúdos: Frações; Números decimais; Razão e proporção.

Objetivo geral: Relembrar os conceitos anteriormente listados e utilizá-los para resoluções de questões do ENEM.

Objetivos específicos:

- Compreender as relações de equivalência de frações;
- Efetuar operações com frações próprias e impróprias;
- Realizar operações com números decimais;
- Reconhecer questões que podem ser resolvidas usando razão e proporção;
- Resolver problemas utilizando razão e proporção.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 4 horas.

Recursos didáticos:

Quadro, giz, atividades impressas, papel cartão, varal numérico, grampos, lápis, borracha, caderno.

Encaminhamento metodológico:

Os alunos serão recebidos na porta da sala de aula por um estagiário, momento em que receberão um cartão indicando uma coordenada cartesiana e no verso um número racional em forma de fração ou decimal. As carteiras estarão alocadas em formato de parábola e cada aluno deverá se sentar na carteira correspondente à coordenada escrita no cartão. A primeira carteira da fileira mais à esquerda será a coordenada (1,1), a segunda será a coordenada (1,2) e assim sucessivamente.

Com os alunos já alocados, os estagiários irão se apresentar e solicitar que os alunos se apresentem, iniciando pelo aluno mais à esquerda dos estagiários e assim subsequentemente até que todos tenham dito seu nome, idade, cidade, em qual escola estudam e que curso pretendem fazer.

(*10 minutos)*

Em seguida será realizada uma dinâmica em conjunto com os alunos: **O Varal dos Números.** O objetivo desta dinâmica é comparar valores racionais, em forma decimal e fracionada.

Resumo da dinâmica

- Um barbante será amarrado em duas carteiras, formando um varal.
- Um estagiário colocará o cartão “0” no varal, para referência dos alunos.
- Um estagiário irá entregar os grampos para que os alunos coloquem o cartão no varal, representado pelo barbante esticado.
- Então, os estagiários irão solicitar que os alunos se levantem e grampeiem os números racionais recebidos na porta em ordem crescente no varal.
- Os números informados em cada cartão serão os do apêndice I.

(*10 minutos)*

Após a dinâmica os alunos irão retornar as suas cadeiras para uma breve análise acerca do varal construído.

Os estagiários irão apresentar o conteúdo a ser tratado com os alunos naquele momento: Frações e Números Decimais.

(40 minutos)

No quadro, os estagiários apresentarão os seguintes conceitos aos alunos, buscando interagir e relembrar o que eles sabem do conteúdo. Não serão escritos formalmente estes conceitos, mas trabalhados a partir dos exemplos dados abaixo.

- **Estrutura da Fração;**
- **Quociente de uma divisão;**

- **Frações decimais;**
- **Frações próprias;**
- **Frações impróprias;**
- **Frações aparentes;**
- **Frações equivalentes;**

Relembrados estes conceitos, os estagiários, a partir das situações observadas na dinâmica do varal, irão tratar de simplificação de frações, utilizando a seguinte fração:

$$\frac{90}{240}$$

Resolução: Considerando que 90 e 240 são múltiplos de 2, podemos dividi-los por 2, obtendo a fração $\frac{45}{120}$. Na nova fração, 45 e 120 são múltiplos de 5, então dividindo numerador e denominador por 5, temos $\frac{9}{24}$. Já que 9 e 24 são divisíveis por 3, ficaremos com $\frac{3}{8}$.

Em seguida, será abordado o conceito de adição e subtração de frações, utilizando os seguintes exemplos:

Exemplo a: $\frac{5}{12} - \frac{1}{4}$

Serão dados cinco minutos aos alunos para a resolução do problema. Espera-se com esse exercício que os alunos utilizem frações equivalentes. Os estagiários caminharão pela sala de aula durante esse tempo, observando o desenvolvimento da atividade pelos alunos e os auxiliando, e passado o tempo, será feita a resolução no quadro com ajuda dos alunos, apontando como pensaram o exemplo.

Resolução: Espera-se que os alunos usem a equivalência de frações.

$$\frac{5}{12} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12} - \frac{1}{4} \times 3 = \frac{5}{12} - \frac{3}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

Exemplo b: Resolva a seguinte equação $\frac{5}{7} \cdot \frac{9}{2} = ?$

Resolução do Exemplo b: $\frac{5}{7} \cdot \frac{9}{2} = \frac{45}{14}$

Exemplo c: Escreva o seguinte número decimal 0,31 em fração

Resolução do Exemplo c: $0{,}31 = \frac{31}{100}$

Exemplo d: Escreva a seguinte fração $\frac{1}{5}$ em número decimal

Resolução do Exemplo d: $\frac{1}{5} = \frac{1\times2}{5\times2} = \frac{2}{10} = 0,2$

Exemplo e: Faça a seguinte soma: $98,74 + 73,47$

Resolução do Exemplo e: 98,74 + 73,47= 172,21

Exemplo f: Resolva a seguinte subtração: $152,20 - 51,19$

Resolução do Exemplo f: 152,20 - 51,19 = 101,01

Exemplo g: Resolva a seguinte multiplicação: $4 \times 630,48$

Resolução do Exemplo g: $4 \times 630,48 = 4 \cdot \frac{63048}{100} = \frac{292192}{100} = 2921,92$

A cada exemplo serão dados cinco minutos para resolução por parte dos alunos, e em seguida, será feita a resolução em conjunto, avaliando as ideias e diferentes formas de pensar cada exemplo.

Terminadas as resoluções, os estagiários questionarão os alunos acerca do que compreenderam sobre os assuntos propostos nos exemplos.

Os estagiários perguntarão oralmente para os alunos:

- Como eles fizeram a multiplicação de decimais?
- Como representaram os números decimais nas equações?
- A equivalência de frações foi utilizada?
- Como transformaram em uma fração equivalente?
- Onde tiveram mais dúvidas nas resoluções?
- Usaram MMC?

Os estagiários usarão as respostas dos alunos para abordar os conteúdos com mais dúvidas para pequenas revisões.

A seguir, os alunos serão divididos em grupos de quatro integrantes e os estagiários apresentarão duas situações-problema para cada grupo envolvendo o conteúdo recém estudado, ambas serão entregues impressas aos alunos, conforme o 'anexo III'.

(45 minutos)

Problema 1. Sabrina gosta de correr todos os dias por uma pista de 900m. Em um dia ela correu $\frac{2}{3}$ do total da pista e fez uma pausa, depois caminhou mais $\frac{7}{6}$ antes de uma segunda pausa. Responda:

a) Qual a fração que corresponde a distância que ela correu até a segunda pausa?

Resolução: Devemos somar as distâncias dos dois períodos em que Sabrina correu, ou seja,

$$\frac{2}{3}+\frac{7}{6}=\frac{2\cdot 2}{3\cdot 2}+\frac{7}{6}=\frac{4}{6}+\frac{7}{6}=\frac{11}{6}$$

Sabrina correu $\frac{11}{6}$ da pista.

b) Qual a distância, em metros, que ela correu?

Resolução: Sabendo que ela correu $\frac{11}{6}$ por uma pista de 900m, temos:

$$\frac{11}{6}\cdot 900=\frac{9.900}{6}=1.650$$

$\frac{11}{6}$ da pista equivalem a 1.650m.

c) Quantos metros ainda faltam para Sabrina completar ida e volta dessa pista?

Resolução: Ida e volta significa que Sabrina irá correr o dobro do comprimento da pista, ou seja 2 · 900 = 1.800m

Sabendo que ela já correu 1.650m, então o restante equivale a diferença:

1.800 – 1.650 = 150m

O restante para Sabrina completar ida e volta pela pista é 150m.

d) Qual fração representa esse restante em relação ao comprimento da pista?

Resolução: A fração que representará os 150m restantes é obtida do restante pelo total da pista:

$$\frac{150}{900}$$

Como essa fração não é a menor possível, podemos simplificá-la:

$$\frac{150}{900}:\frac{2}{2}=\frac{75}{450}:\frac{3}{3}=\frac{25}{90}:\frac{5}{5}=\frac{5}{18}$$

A menor fração que representa os 150m restantes é $\frac{5}{18}$.

Problema 2. As estações do ano no hemisfério sul são inversas as do hemisfério norte. No Rio de Janeiro, por exemplo, durante o verão de 2021, a maior temperatura registrada foi de 40,2º C. Na mesma época, em São Petersburgo, na Rússia, a menor temperatura registrada no inverno de 2021 foi de –20,9º C. Qual foi a diferença de temperatura entre essas duas cidades?

Resolução: A fim de interpretação, buscamos a diferença entre duas temperaturas, ou seja, devemos subtrair uma da outra.

Assim, temos: 40,2 – (–20,9) = 40,2 + 20,9 = 61,1

Logo, a diferença entre as temperaturas dessas duas cidades é de 61,1º C.

Em seguida, os estagiários entregarão a lista I (‘anexo II’) impresso, contendo 14 questões de provas anteriores do ENEM, das quais os estagiários resolverão uma com a turma.

Para resolução coletiva, os estagiários irão solicitar que os alunos leiam a questão 1 do ‘anexo II’:

(*15 Minutos)*

Problema 3. (Enem 2017) Em uma cantina, o sucesso de vendas no verão são sucos preparados à base de polpa de frutas. Um dos sucos mais vendidos é o de morango com acerola, que é preparado com $\frac{2}{3}$ de polpa de morango e $\frac{1}{3}$ de polpa de acerola. Para o comerciante, as polpas são vendidas em embalagens de igual volume. Atualmente, a embalagem da polpa de morango custa R$ 18,00 e a de acerola, R$ 14,70. Porém, está prevista uma alta no preço da embalagem da polpa de acerola no próximo mês, passando a custar R$ 15,30. Para não aumentar o preço do suco, o comerciante negociou com o fornecedor uma redução no preço da embalagem da polpa de morango. A redução, em real, no preço da embalagem da polpa de morango deverá ser de quanto?

Resolução: Custo do suco antes do aumento:

Morango: $\frac{2}{3} \times \text{R\$}18{,}00 = \text{R\$}12{,}00$

Acerola: $\frac{1}{3} \times \text{R\$}14{,}70 = \text{R\$}4{,}90$

Custo total do suco: $\text{R\$ } 12{,}00 + \text{R\$}4{,}90 = \text{R\$}16{,}90$.

Para que não haja alteração no preço final do suco o preço de custo precisa permanecer constate, porém com o aumento de preço da polpa de acerola em 60 centavos, temos:

Acerola: $\frac{1}{3} \times \text{R\$}15{,}30 = \text{R\$}5{,}10$

Então o custo do suco de morango precisa ser:

Morango: $\text{R\$ } 16{,}90 - \text{R\$}5{,}10 = \text{R\$}11{,}80$

$$\frac{2}{3} \times Y = \text{R\$ } 11{,}80$$

$$2Y = 35{,}40$$

$$Y = \text{R\$}17{,}70$$

Logo, o desconto no preço da polpa de morango deve ser de R$ 0,30.

Serão dados dez minutos para leitura e tentativa de resolução por parte dos alunos, os estagiários auxiliarão durante este tempo. Transcorrido este tempo, os estagiários farão a correção da questão no quadro, abordando possíveis erros que os alunos poderiam ter e explicitando onde entram os conteúdos estudados até o momento nesta questão.

Terminada a questão, os estagiários vão sugerir que os alunos tentem resolver as demais questões da lista em casa e tragam dúvidas para o próximo encontro. Em seguida, serão liberados para 20 minutos de intervalo.

Razão e Proporção

Após o retorno do intervalo, será abordado o assunto de razão e proporção, com uma breve explicação sobre razão a partir da seguinte situação problema, presente no ‘anexo III’ entregue anteriormente:

Problema 4. Um concurso teve 1200 inscritos sendo ofertadas um total de 12 vagas. Qual razão entre o número de vagas em relação ao número de inscritos? Qual a razão do número de inscritos em relação ao número de vagas?

(*20 Minutos)*

Resolução: Se temos 1200 inscritos e 12 vagas, a razão será fração do número de vagas em relação aos inscritos:

$$\frac{12}{1200} = \frac{1}{100}$$

A razão dada pelo o número de inscritos sobre o número de vagas:

$$\frac{1200}{12} = \frac{100}{1} = 100$$

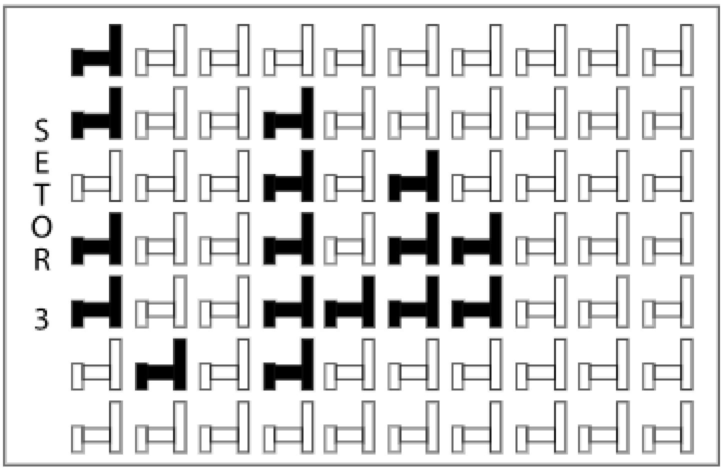
Os estagiários pedirão que os alunos resolvam a situação-problema explicando oralmente sua forma de pensar, para isso serão dados 5 minutos, após isso, será definido no quadro:

“A razão entre a e b, com b diferente de 0, é o quociente a/b”

Definido e exemplificado o que é uma razão, os estágios pedirão que os alunos peguem novamente a lista I (Anexo II) com as 14 questões de anos anteriores do ENEM e pedirão que os alunos leiam e tentem resolver a questão 7 da lista:

(*35 Minutos)*

Problema 5. (Enem 2013) Em um certo teatro, as poltronas são divididas em setores. A figura apresenta a vista do setor 3 desse teatro, no qual as cadeiras escuras estão reservadas e as claras não foram vendidas



A razão que representa a quantidade de cadeiras reservadas do setor 3 em relação ao total de cadeiras desse mesmo setor é?

Resolução: Sabendo que o setor 3 possui um total de 70 cadeiras (7 linhas x 10 colunas) e foram reservadas 16 poltronas (cor escura), temos a razão dada por:

$$\frac{16}{70} = \frac{8}{35}$$

Serão dados cinco minutos para discussão entre os alunos e esclarecimento de possíveis dúvidas de maneira individual por parte dos estagiários, então a questão será resolvida coletivamente.

Depois disso, será relembrada a explicação dada sobre frações equivalentes e será definida o que é uma razão equivalente:

“Razões que possuem o mesmo quociente são chamadas equivalentes”.

Em seguida, os estagiários apresentação no quadro uma pergunta:

“A razão $\frac{15}{25}$ é equivalente a $\frac{4}{5}$?”

Resolução: Dada a definição de razões equivalente, simplificaremos a fração $\frac{15}{25}$ ao denominador 5 para verificarmos a preposição.

$$\frac{15}{25} = \frac{3}{5}$$

Como a fração encontrada foi $\frac{3}{5}$, logo...

$$\frac{15}{25} \neq \frac{4}{5}$$

É esperado que alunos respondam prontamente ao questionamento, caso contrário, os estagiários vão relembrar oralmente o conceito de frações equivalentes estudado anteriormente.

Seguidamente, para apresentar o conceito de proporção, os estagiários irão propor a resolução do seguinte exemplo:

$$\frac{4}{6} = \frac{x}{18}$$

Resolução: Utilizando a propriedade apresentada adiante, multiplicaremos o 4 por 18 e 6 por x:

$$6 \cdot \mathrm{x} = 4 \cdot 18$$

$$6 \cdot \mathrm{x} = 72$$

$$\mathrm{x} = \frac{72}{6}$$

$$\mathrm{x} = 12$$

Os estagiários perguntarão quais formas de resolução os alunos sugerem para encontrar o valor de x, está discussão oral deverá levar a resolução do exemplo e em seguida a definição de proporção, que será escrita no quadro:

“Proporção é uma igualdade entre duas frações $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$.”

Os estagiários questionarão os alunos acerca da denominação das variáveis e utilizando as respostas dadas pelos alunos, escreverão no quadro:

“A e D são chamados de extremos, enquanto B e C são chamados de meios, de modo que vale a propriedade: o produto dos meios é igual ao produto dos extremos”.

Relembrados estes conceitos, os estagiários lerão em voz alta o seguinte problema envolvendo proporção, contido no ‘anexo III’:

Problema 5. Uma rua tem 600 m de comprimento e está sendo asfaltada. Em seis dias foram asfaltados 180 m da rua. Supondo-se que o ritmo de trabalho continue o mesmo, qual o total de dias empreendidos no asfaltamento?

Serão escritos no quadro os dados do problema e este será discutido oralmente com os alunos, até ser obtida uma resposta de comum acordo entre os alunos, seja ela certa ou errada. Caso a resolução dos alunos seja incorreta, os estagiários usarão o quadro para corrigi-la, se a resolução estiver correta, a aula prossegue.

Resolução: Sabendo que em 6 dias foram asfaltados 180 metros de rua, logo em x dias será maior que 6, visto que será asfaltado 600 metros de rua, de modo que 6 estará para x e 180 estará para 600.

$$\frac{6}{180} = \frac{x}{600}$$

$$180 \cdot \mathrm{x} = 6 \cdot 600$$

$$180 \cdot \mathrm{x} = 3600$$

$$\mathrm{x} = \frac{3600}{180}$$

$$\mathrm{x} = 20 \text{ dias}$$

Por fim, será pedido que os alunos peguem novamente a lista I, para resolução em sala das questões 8, 9 e 10 os estagiários lerão as questões com os alunos e deixarão que os grupos discutam entre si durante 15 minutos, em seguida será solicitado que cada grupo apresente como fez as resoluções e então os estagiários farão a correção com esclarecimento de possíveis dúvidas no quadro.

(55 minutos)

Problema 6. (Enem 2014) Boliche é um jogo em que se arremessa uma bola sobre uma pista para atingir dez pinos, dispostos em uma formação de base triangular, buscando derrubar o maior número de pinos. A razão entre o total de vezes em que o jogador derruba todos os pinos e o número de jogadas determina seu desempenho.

Em uma disputa entre cinco jogadores, foram obtidos os seguintes resultados:

- Jogador I – Derrubou todos os pinos 50 vezes em 85 jogadas.
- Jogador II – Derrubou todos os pinos 40 vezes em 65 jogadas.
- Jogador III – Derrubou todos os pinos 20 vezes em 65 jogadas.
- Jogador IV – Derrubou todos os pinos 30 vezes em 40 jogadas.
- Jogador V – Derrubou todos os pinos 48 vezes em 90 jogadas.

Qual desses jogadores apresentou maior desempenho?

20 Minutos

Resolução: Do texto retiramos que “a razão entre o total de vezes em que o jogador derruba todos os pinos e o número de jogadas determina seu desempenho”.

Devemos relembrar que, ao falar sobre razão, nos referimos a uma divisão de dois números.

Sendo assim, podemos calcular a pontuação de cada jogador da seguinte forma:

$$\frac{número\ de\ vezes\ que\ o\ jogador\ derruba\ todos\ os\ pinos}{número\ de\ jogadas} = \text{desempenho}$$

Usando dessa fórmula, podemos calcular para cada jogador:

Jogador I – $\frac{50}{85}$ = 0,58

Jogador II – $\frac{40}{65}$ = 0,61

Jogador III – $\frac{20}{65}$ = 0,30

Jogador IV – $\frac{30}{40}$ = 0,75

Jogador V – $\frac{48}{90}$ = 0,53

A resposta será o maior número decimal obtido, ou seja, 0,75, desempenho do Jogador IV.

Também há outras maneiras de obter a resposta correta, como por exemplo, através de comparação entre frações com mesmo denominador.

Problema 7. (Enem 2020) Um pé de eucalipto em idade adequada para o corte rende, em média, 20 mil folhas de papel A4. A densidade superficial do papel A4, medida pela razão da massa de uma folha desse papel por sua área, é de 75 gramas por metro quadrado, e a área de uma folha de A4 é 0,062 metro quadrado.

Disponível em: http://revistagalileu.globo.com. Acesso em: 28 fev. 2013 (adaptado).

Nessas condições, quantos quilogramas de papel rende, em média, um pé de eucalipto?

Resolução: Do texto temos que “a densidade superficial do papel A4, medida pela razão da massa de uma folha desse papel por sua área” pode ser escrita como:

$$densidade = \frac{75g}{m^2}$$

Então podemos escrever que:

$$\frac{75g}{1m^2} = \frac{x}{0{,}062m^2}$$

Multiplicando cruzado obtemos:

$$x = 75 \cdot 0{,}062$$

$$x = 4{,}65$$

Sabendo que um pé de eucalipto rende, em média, 20 mil folhas de papel A4, temos:

$$20.000 \cdot 4{,}65 = 93.000g$$

Transformando de gramas para quilogramas, temos que, um pé de eucalipto rende, em média, 93kg.

Problema 8. (Enem 2020) Um motociclista planeja realizar uma viagem cujo destino fica a 500 km de sua casa. Sua moto consome 5 litros de gasolina para cada 100 km rodados, e o tanque da moto tem capacidade para 22 litros. Pelo mapa, observou que no trajeto da viagem o último posto disponível para reabastecimento, chamado Estrela, fica a 80 km do seu destino. Ele pretende partir com o tanque da moto cheio e planeja fazer somente duas paradas para reabastecimento, uma na ida e outra na volta, ambas no posto Estrela. No reabastecimento para a viagem de ida, deve considerar também combustível suficiente para se deslocar por 200 km no seu destino.

A quantidade mínima de combustível, em litro, que esse motociclista deve reabastecer no posto Estrela na viagem de ida, que seja suficiente para fazer o segundo reabastecimento, é:

Resolução: Temos que a moto consome 5 litros para cada 100km e que o tanque possui capacidade de 22L. Para descobrir quantos litros irá ser consumido em 420 km fazemos:

$$\frac{420}{x} = \frac{100}{5}$$

Multiplicando cruzado, temos:

$$100x = 420 \cdot 5$$

$$100x = 2.100$$

$$x = \frac{2.100}{100}$$

$$x = 21L$$

Aqui podemos perceber que, de 22L, sobrará 1L.

Para 80 km, irá consumir:

$$\frac{100}{5} = \frac{80}{x}$$

$$100x = 80 \cdot 5$$

$$100x = 400$$

$$x = \frac{400}{100}$$

$$x = 4L$$

E para deslocar-se por 200 km:

$$\frac{100}{5} = \frac{200}{x}$$

$$100x = 200 \cdot 5$$

$$100x = 1.000$$

$$x = \frac{1.000}{100}$$

$$x = 10L$$

Para chegar ao seu destino e voltar ao posto Estrela, ele precisará de:

$$10 + 4 + 4 = 18L$$

Mas como havia sobrado 1L anteriormente, a quantidade mínima de combustível utilizada será de 17L.

Avaliação:

A avaliação será realizada de forma contínua no decorrer da aula, na qual será avaliada a desenvoltura dos alunos ao responder os questionamentos realizados pelos estagiários.

Referências Bibliográficas:

RIBEIRO, Marcelo. **Frações no ENEM**. Disponível em: https://www.projetoagathaedu.com.br/questoes-enem/matematica/fracao.php. Acesso em: 27 set. 2022.

RODRIGUES, Camila. **Razões e proporções**. Disponível em: https://pt.slideshare.net/camilarodrigues35912672/razes-e-propores-30251873. Acesso em: 26 set. 2022.

SOUZA, Joamir Roberto; PATARO, Patricia Rosana Moreto. **Vontade de saber matemática**, 7º ano / 3. ed. São Paulo: FTD, 2015.

TROVÃO, Luiz Filipe. **Fração como razão entre duas grandezas**. Disponível em: https://novaescola.org.br/planos-de-aula/fundamental/7ano/matematica/fracao-como-razao-entre-duas-grandezas/. Acesso em: 27 set. 2022.

ZONZINI, Cleudiana dos Santos Feitoza. **Frações equivalentes**. Disponível em: https://novaescola.org.br/planos-de-aula/fundamental/6ano/matematica/fracoes-equivalentes. Acesso em: 27 set. 2022.

5.2. RELATÓRIO DO ENCONTRO I.

Número de alunos: 19.

Conteúdo desenvolvido na aula: Frações; Números decimais; Razão e proporção.

Neste primeiro encontro estiveram presentes 12 meninas e 6 meninos, sendo que um menino chegou atrasado totalizando 19 alunos (a) em sala. No decorrer da aula não teve nenhuma intercorrência, de tal forma a aula seguiu normalmente.

Inicialmente os estagiários, então em função de docentes, se apresentaram e na sequência solicitaram para que os discentes se apresentassem dizendo algumas características pessoais, como: nome, idade, escola e qual série estavam cursando. Em seguida entregamos aos discentes um cartão contendo uma fração ou número decimal de forma aleatória para que pudéssemos iniciar a primeira atividade, o 'Varal das Frações'.

Na sequência, entregues os cartões, apresentamos as regras e como a nossa atividade iria ocorrer, logo os discentes se deslocaram de suas cadeiras seguindo a ordem das fileiras, colocando o cartão em ordem crescente no varal que colocamos à frente do quadro.

Com está atividade, pudemos promover a interação dos discentes e observar as concepções e noções de grandeza deles sobre frações e números decimais. No decorrer da atividade, notamos algumas dúvidas sobre qual posição estaria o cartão por parte dos discentes, então auxiliamos os alunos que estavam mais indecisos e dificuldades.

Terminada a atividade, questionamos os alunos sobre a ordem do varal, perguntando se estava crescente, como proposto. Notamos que, no geral, estava correta, corrigindo a posição de apenas dois cartões, cujas posições estavam incorretas, com os comentários da turma.

Então, a partir da atividade do varal, abordamos alguns conceitos de fração, tais como: estrutura da fração, fração aparente, fração decimal e fração equivalente. Apresentados os conceitos no quadro, colocamos alguns exemplos no quadro, com operações básicas envolvendo frações e números decimais. Os exemplos apresentados foram:

Exemplo a) $\frac{5}{12} - \frac{1}{4}$

Exemplo b) $\frac{5}{7} \cdot \frac{9}{2}$

Exemplo c) Escreva o seguinte número decimal 0,31 em fração

Exemplo d) Escreva a seguinte fração $\frac{1}{5}$ em número decimal

Exemplo e) $98{,}74 + 73{,}47$

Exemplo f) $152{,}20 - 51{,}19$

Exemplo g) $4 \times 630{,}48$

Exemplo h) $\frac{9}{4} + \frac{7}{10}$

Foram dados aos discentes o tempo de cinco minutos em cada exemplo para que pudessem realizar as operações com nosso auxílio, já que estávamos caminhando pela sala de aula neste momento. Observamos no decorrer das operações que o exemplo h foi o que mais trouxe dúvidas para alunos, então fizemos as resoluções no quadro abordando conceitos anteriores e apresentando detalhadamente as formas de resolver o exemplo h, vistas as dificuldades dos alunos.

Com os exemplos terminados e corrigidos, solicitamos que os alunos se organizassem em grupos para o restante da aula, os grupos ficaram divididos em três grupos com cinco e um grupo com quatro alunos.

Na sequência, entregamos aos alunos a lista a ser trabalhada durante o encontro, contendo 14 questões e seis situações problema (anexo II e anexo III) sobre os conceitos que seriam abordados em aula. Com isso, pedimos que um dos alunos lesse o problema 1 da lista (anexo II), o qual resolvemos no quadro, para que os alunos pudessem tratar de dúvidas pertinentes em relação aos conceitos, para a resoluções dos problemas que indicaríamos posteriormente.

Após isso, abordamos o problema 3 (anexo III). Foram dados dez minutos para que os alunos tentassem resolver a problema com nosso auxílio individual e, em seguida, fizemos a resolução no quadro com participação dos discentes abordando conceitos anteriores e tirando as poucas dúvidas que surgiram.

Após o intervalo, entregamos a lista de chamada para que os alunos assinassem a presença, o número de assinaturas foi igual a quantidade de alunos em sala. Pedimos também que, se possível, os alunos colocassem seus números de celular para criação de um grupo de *whattsapp* da turma onde disponibilizaremos a resolução das listas e demais informações sobre as aulas.

Em seguida, a partir do problema 4 (anexo II) abordamos o conteúdo de razão e proporção. Questionamos os alunos sobre os conceitos que já haviam visto sobre razão e proporção e perguntamos o que eles entendiam por razão e proporção. Então, resolvemos o problema no quadro, apresentando a definição e relembrando os conceitos pré-existentes dos alunos. Relembrados os conceitos, solicitamos que os alunos resolvessem o problema 5 (anexo III), deixamos dez minutos para que os alunos pudessem tentar resolver o problema, com nosso auxílio individual dentro dos grupos. Curiosamente, alguns alunos utilizaram conceitos abordados anteriormente e outros não, e pudemos notar bastante interação entre os alunos neste momento. Transcorrido o tempo, resolvemos o problema no quadro, de acordo com os comentários dos alunos.

Por fim, apresentamos o problema 6 (anexo III), e demos mais dez minutos aos alunos para que pudessem resolver tal questão. O problema 6 chamou nossa atenção, pois três alunos utilizaram maneiras distintas para a resolução, então pedimos que dois alunos fizessem a resolução no quadro, visto que as forma de resolver o problema eram bastante distintas. Na sequência, disponibilizamos os últimos três minutos de aula para tirar as dúvidas sobre a lista e demais atividades realizadas em sala. Enfim, liberamos os discentes no horário exato 11:40.

O grupo de *whattsapp* com os alunos, foi criado após o encontro.

6. ENCONTRO II.

6.1. PLANO DE AULA– ENCONTRO II - 15/10/2022.

Público-alvo: Alunos do 3º ano do Ensino Médio da rede pública estadual do Paraná.

Estagiários: Adrian Zanardi, Alexsandro Andre Alves de Freitas, Márcio Rocha e Meirielly Fernandes de Lima.

Conteúdos: Funções, equações e sistemas do primeiro grau.

Objetivo geral: Relembrar conceitos algébricos e de funções afim.

Objetivos específicos:

- Reconhecer e explorar as linguagens algébricas para resolver problemas envolvendo equações do primeiro grau;
- Resolver um sistema de equações lineares com duas incógnitas;
- Utilizar métodos da adição, subtração e substituição para determinar a solução de problemas modelados a partir de um sistema de equações lineares;
- Identificar e diferenciar os termos de uma função afim;

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 4 horas.

Recursos didáticos:

Quadro, giz, atividades impressas, lápis, borracha, caderno.

Encaminhamento metodológico:

A sala de aula estará organizada de modo que os alunos se reúnam em grupos com quatro integrantes, com os alunos acomodados nos grupos, questionaremos os alunos acerca da lista deixada no encontro anterior. Com isso reservaremos 30 minutos para exposição de dúvidas das questões na qual tiveram dificuldades. Caso não apareça dúvidas, resolveremos algumas questões deixadas no encontro anterior escolhida pelos alunos.

(35 minutos)

Em seguida, relembraremos conceitos estudados no “Encontro 1” sobre razão e proporção, utilizando parte do processo resolutivo para compreensão dos conceitos de equações. Situação problema nº 4 da lista do “Encontro 1”: Uma rua tem 600 m de comprimento e está sendo asfaltada. Em seis dias foram asfaltados 180 m da rua. Supondo-se que o ritmo de trabalho continue o mesmo, qual o total de dias empreendidos no asfaltamento?

Utilizaremos a passos da solução da questão para encontramos duas sentenças entre uma igualdade:

$$\frac{6}{180} = \frac{x}{600}$$

$$180 \cdot x = 6 \cdot 600$$

Para apresentar a forma de resolução, usaremos o conceito de equilíbrio, tudo que é feito de um lado da igualdade também deve ser feito no outro.

Utilizando o conceito de operações inversas e buscaremos o resultado para a incógnita, letra x no exemplo acima, dividindo por 180 nos dois lados da igualdade.

Exemplo A:

$$\frac{180 \cdot x}{180} = \frac{6 \cdot 600}{180}$$

$$x = \frac{3600}{180}$$

$$x = 20$$

A partir dessa resolução definiremos brevemente uma equação:

“Uma equação é uma sentença matemática aberta, ou seja, sentença matemática que possui ao menos uma incógnita, e que estabelece uma igualdade entre duas expressões matemáticas”.

Solicitaremos aos alunos que resolvam o exemplo B e apresentem suas respostas aos estagiários e aos colegas.

Exemplo B:

$$2 \cdot x + \frac{5}{3} = x + \frac{13}{3}$$

Disponibilizaremos cinco minutos para que os alunos resolvam o exemplo e, posteriormente, faremos a resolução no quadro.

Resolução proposta:

$$2 \cdot x + \frac{5}{3} = x + \frac{13}{3}$$

$$2 \cdot x - x + \frac{5}{3} - \frac{5}{3} = x - x + \frac{13}{3} - \frac{5}{3}$$

$$x = \frac{8}{3}$$

Apresentada e discutida, entregaremos a “lista de atividades 2” e pediremos que os alunos observem o primeiro problema proposto.

Problema 1. (Enem 2009) Um grupo de 50 pessoas fez um orçamento inicial para organizar uma festa, que seria dividido entre elas em cotas iguais. Verificou-se ao final que, para arcar com todas as despesas, faltavam R$ 510,00, e que 5 novas pessoas haviam ingressado no grupo. No acerto foi decidido que a despesa total seria dividida em partes iguais pelas 55 pessoas. Quem não havia ainda contribuído pagaria a sua parte, e cada uma das 50 pessoas do grupo inicial deveria contribuir com mais R$ 7,00. De acordo com essas informações, qual foi o valor da cota calculada no acerto final para cada uma das 55 pessoas?

Concederemos oito minutos para que os alunos pensem e tentem resolver a questão, auxiliando individualmente os mesmos e em seguida resolveremos no quadro. Solicitaremos que um dos alunos se voluntarie a fazer sua resolução no quadro, explicando-a para os colegas.

Solução proposta

Seja x o valor pago por cada pessoa. A despesa pode ser representada por D = 55x. Inicialmente 50 pessoas pagariam x – 7 e faltavam 510 reais para pagar a despesa, ou seja:

$$D = 50\,(x - 7) + 510$$

Igualando as duas equações, temos que:

$$55x = 50\,(x - 7) + 510$$

$$55x = 50x - 350 + 510$$
$$55x - 50x = 160$$
$$5x = 160$$
$$x = \frac{160}{5}$$
$$x = 32$$

Apresentaremos outro problema e solicitaremos que um dos alunos leia a questão.

Problema 2. (ENEM 2021 – Adaptada) Aplicativos que gerenciam serviços de hospedagem têm ganhado espaço no Brasil e no mundo por oferecer opções diferenciadas em termos de localização e valores de hospedagem. Em um desses aplicativos, o preço P a ser pago pela hospedagem é calculado considerando um preço por diária d, acrescido de uma taxa fixa de limpeza L e de uma taxa de serviço. Essa taxa de serviço é um valor percentual s calculado sobre o valor pago pelo total das diárias.

Nessa situação, o preço a ser pago ao aplicativo para uma hospedagem de n diárias pode ser obtido será obtido por qual expressão?

Concederemos oito minutos para que os alunos pensem e tentem resolver a questão, auxiliando individualmente os mesmos e em seguida resolveremos no quadro. Solicitaremos que um dos alunos se voluntarie a fazer sua resolução no quadro, explicando-a para os colegas.

Resolução proposta:

Do enunciado: "em um desses aplicativos, o preço P a ser pago pela hospedagem é calculado considerando um preço por diária d, acrescido de uma taxa fixa de limpeza L (...)".

Logo, $P = n \cdot d + L$, ou seja, o preço fica sendo igual a taxa fixa de limpeza L somada com a quantidade n de dias multiplicada pelo preço d da diária.

Além disso, também do enunciado: "(...) e de uma taxa de serviço. Essa taxa de serviço é um valor percentual s calculado sobre o valor pago pelo total das diárias. (...)".

Agora, basta multiplicar s por $(n \cdot d)$ e somar com a expressão para P.

$$P = n \cdot d + L + s \cdot n \cdot d$$

Subsequentemente, questionaremos acerca das dúvidas que tiveram até o momento e faremos pequenas revisões orais relembrando o que foi trabalhado na aula até aqui.

(55 minutos)

Em seguida, trabalharemos problemas envolvendo sistemas de equações lineares do primeiro grau. Durante a resolução destes problemas, relembraremos conceitos e métodos de resolução de sistemas lineares do primeiro grau.

Problema 3. Um comerciante registrou na tabela seus gastos na compra de latas de palmito e azeitona, durante uma semana.

Dia da semana	Latas de palmito	Latas de azeitona	Valor total
segunda-feira	1	7	R$ 34,00

terça-feira	5	3	R$ 42,00
quarta-feira	2	9	?

Os preços permaneceram constantes durante essa semana. Qual foi o valor que o comerciante anotará na sexta-feira?

Resolução proposta:

Supondo que *x* seja o valor, em reais, de uma lata de palmito e *y* o valor de uma lata de azeitona, na segunda-feira e terça-feira, teremos as seguintes equações, respectivamente, formando um sistema:

$$\begin{cases} x + 7y = 34 \\ 5x + 3y = 42 \end{cases}$$

Método da adição:

Multiplicando a primeira equação por -5 obtemos:

$$\begin{cases} -5x - 35y = -170 \\ 5x + 3y = 42 \end{cases}$$

Ao somar as duas equações, temos:

$$-5x + 5x - 35y + 3y = -170 + 42$$

$$-32y = -128$$

$$y = \frac{-128}{-32}$$

$$y = 4$$

Encontramos o valor (preço) de uma lata de azeitona, que é de R$ 4,00.

Para encontrar o valor (preço) de uma lata de palmito, usamos qualquer equação do sistema e substituímos y por 4:

$$x + 7y = 34$$

$$x + 7 \cdot 4 = 34$$

$$x + 28 = 34$$

$$x = 34 - 28$$

$$x = 6$$

Então, temos que o valor de uma lata de palmito é R$ 6,00.

Agora, calculando o custo de compra na quarta-feira, temos:

$$2 \cdot 6 + 9 \cdot 4 = 12 + 36 = 48$$

Portanto, o valor da compra na quarta-feira foi de R$ 48,00.

<u>Método da substituição:</u>

Escolhendo a primeira equação e isolando x, temos:

$$x + 7y = 34$$

$$x = 34 - 7y$$

Essa é a equação de substituição. Usando-a para substituir x na segunda equação do sistema:

$$5x + 3y = 42$$

$$5 \cdot (34 - 7y) + 3y = 42$$

$$170 - 35y + 3y = 42$$

$$-35y + 3y = 42 - 170$$

$$-32y = -128$$

$$y = \frac{-128}{-32}$$

$$y = 4$$

Voltando para a equação de substituição, pode-se calcular o valor de x:

$$x = 34 - 7y$$

$$x = 34 - 7 \cdot 4$$

$$x = 34 - 28$$

$$x = 6$$

Idem, temos:

$$2 \cdot 6 + 9 \cdot 4 = 12 + 36 = 48$$

Portanto, o valor da compra na quarta-feira foi de R$ 48,00.

Problema 4. "Eu e minha filha fazemos aniversário hoje, e no dia de hoje, a minha idade é o triplo da dela. Daqui a dois anos a soma de nossas idades será 56 anos. Quando minha filha nasceu, quantos anos eu tinha?"

Resolução proposta:

Chamando de x a idade da mãe, e de y a idade da filha. De "a minha idade é o triplo da dela", temos:

$$3x = y$$

E de "a soma de nossas idades será 56 anos", temos:

$$x + y = 56$$

Logo temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 3x = y \\ x + y = 56 \end{cases}$$

<u>Método da substituição:</u>

Podemos dizer que a primeira equação já é a equação de substituição.

Então substituímos y por 3x na segunda equação:

$$x + y = 56$$

$$x + 3x = 56$$

$$4x = 56$$

$$x = \frac{56}{4}$$

$$x = 14$$

Logo, a idade da filha é 14 anos.

A idade da mãe é o triplo da idade da filha, então:

$$3x = y$$

$$3 \cdot 14 = y$$

$$y = 42$$

Portanto, a idade da mãe é 42 anos.

<u>Método da adição:</u>

Multiplicando a segunda equação por –3, temos:

$$\begin{cases} 3x = y \\ -3x - 3y = -168 \end{cases}$$

Somando as equações:

$$3x - 3x - 3y = y - 168$$

$$-3y - y = -168$$

$$-4y = -168$$

$$y = \frac{-168}{-4}$$

$$y = 42$$

Então, a idade da mãe é 42 anos.

Para encontrar a idade da filha, temos:

$$3x = y$$

$$3x = 42$$

$$x = \frac{42}{3}$$

$$x = 14$$

Portanto, a idade da filha é 14 anos.

Problema 5. Em um estacionamento, há carros e motos, totalizando 14 veículos e 48 rodas. Quantos carros e quantas motos há nesse estacionamento?

Resolução proposta:

Supondo x como a quantidade de carros e y a quantidade de motos, e sabendo que um carro possui 4 rodas (desconsiderar estepes) e uma moto possui 2 rodas, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y = 14 \\ 4x + 2y = 48 \end{cases}$$

<u>Método da substituição:</u>

Escolhendo a primeira equação e isolando x, temos:

$$x + y = 14$$

$$x = 14 - y$$

Essa é a equação de substituição. Usando-a para substituir na segunda equação:

$$4x + 2y = 48$$

$$4 \cdot (14 - y) + 2y = 48$$

$$56 - 4y + 2y = 48$$

$$-4y + 2y = 48 - 56$$

$$-2y = -8$$

$$y = \frac{-8}{-2}$$

$$y = 4$$

Nesse estacionamento há 4 motos.

Voltando a equação de substituição, podemos substituir y por 4:

$$x = 14 - y$$

$$x = 14 - 4$$

$$x = 10$$

Logo, nesse estacionamento há 4 motos e 10 carros.

Método da adição:

Multiplicando a primeira equação por –4, temos:

$$\begin{cases} -4x - 4y = -56 \\ 4x + 2y = 48 \end{cases}$$

Somando as duas equações:

$$-4x + 4x - 4y + 2y = -56 + 48$$

$$-2y = -8$$

$$y = \frac{-8}{-2}$$

$$y = 4$$

Da mesma forma do método da adição, encontramos x = 10.

Logo, nesse estacionamento há 4 motos e 10 carros.

Nestas situações problema, após a leitura de cada exercício, daremos alguns minutos para que os alunos pensem e discutam com os colegas e estagiários formas de resolução, em seguida, faremos a correção coletiva no quadro.

Posteriormente, trabalharemos outra questão do ENEM, agora tratando de sistema de equações lineares do primeiro grau.

Problema 6. (ENEM 2012 - Adaptado) O governo de um país criou o Fundo da Soja e do Milho, que tem como expectativa inicial arrecadar, por ano, R$ 36,14 milhões para investimento em pesquisas relacionadas aos principais produtos da agricultura. Com isso, a cada operação de venda, seriam destinados ao Fundo R$ 0,28 por tonelada de soja e R$ 0,22 por tonelada de milho comercializadas. Para este ano, espera-se que as quantidades de toneladas produzidas, de soja e de milho, juntas, seja 150,5 milhões.

Foi pedido a cinco funcionários do Fundo, André, Bruno, Caio, Douglas e Eduardo, que apresentassem um sistema que modelasse os dados apresentados. Cada funcionário apresentou um sistema diferente, considerando x e y como as quantidades de toneladas comercializadas, respectivamente, de soja e de milho. O resultado foi o seguinte:

André $\begin{cases} x + y = 150\ 500\ 000 \\ 0{,}28x + 0{,}22y = 36\ 140\ 000 \end{cases}$ Douglas $\begin{cases} x + y = 150{,}5 \\ 0{,}28x + 0{,}22y = 36{,}14 \end{cases}$

Bruno $\begin{cases} 100\ 000\ 000x + 100\ 000\ 000y = 150{,}5 \\ 0{,}28x + 0{,}22y = 36\ 140\ 000 \end{cases}$ Eduardo $\begin{cases} x + y = 150\ 500\ 000 \\ 0{,}28x + 0{,}22y = 36{,}14 \end{cases}$

Caio $\begin{cases} x + y = 150{,}5 \\ 0{,}28x + 0{,}22y = 36\ 140\ 000 \end{cases}$

Algum funcionário fez a modelagem correta? Se sim, qual?

Resolução proposta:

De acordo com as informações, obtemos o sistema:

$$x + y = 150.500.000$$

$$0{,}28 \times x + 0.22 \times y = 36.140.000$$

Portanto, o funcionário que modelou corretamente o problema foi o André.

Para resolução desta questão, os alunos terão dez minutos e em seguida solicitaremos que um dos alunos faça a resolução no quadro, explicando para os colegas como pensou a questão.

(50 minutos)

Em seguida entregaremos uma cartela para cada aluno, contendo 3 linhas e 3 colunas com uma equação do primeiro grau. Iniciaremos, então, o jogo: **Bingo das Funções.**

Resumo do Jogo

- Os alunos terão em mãos a cartela entregue anteriormente, presento no anexo VI.
- Sortearemos, de forma aleatória, um número que estará em uma caixa.
- O número será anunciado aos alunos.
- Os alunos deverão substituir o número anunciado na variável da função que se encontra na cartela.
- O resultado será o número que eles irão marcar.
- O vencedor será o aluno que completar a cartela corretamente primeiro.
- Uma vez completada a cartela, o aluno deverá gritar a palavra ‘FUNÇÃO’ ao invés de bingo para que ganhe o jogo.
- Os alunos poderão interagir entre si e com os estagiários durante a execução da atividade.

Durante a dinâmica, dois estagiários sortearão os números e dois circularão pela sala auxiliando e tirando possíveis dúvidas dos alunos.

Terminado o jogo, formalizaremos no quadro, o que é uma função:

"Função é uma regra que relaciona cada elemento de um conjunto a um único elemento de outro conjunto. Para cada valor de x, podemos determinar um valor de y, dizemos então que y está em função de x"

Em seguida, diferenciaremos uma função de uma equação, explicando oralmente aos alunos e tirando possíveis dúvidas utilizando o quadro.

(50 minutos)

Avaliação:

A avaliação será realizada de forma contínua no decorrer da aula, na qual será avaliada a desenvoltura, participação e empenho dos alunos ao realizar as atividades propostas e responder os questionamentos levantados pelos estagiários.

Referências Bibliográficas:

GREGORUTTI, Juliana de Lima. **O que são equações do 1° grau?** Disponível em: https://novaescola.org.br/planos-de-aula/fundamental/7ano/matematica/o-que-sao-equacoes-do-1-grau/1529. Acesso em: 09 out. 2022.

LENCINA, Luísa. **FUNÇÃO AFIM**. Disponível em: http://hojenomundodamatematica.blogspot.com/2017/05/plano-de-aula-funcao-afim.html. Acesso em: 11 out. 2022.

MOURA, M. O. **A séria busca no jogo:** do lúdico na matemática. In: KISHIMOTO, T. M. (org.). Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação. São Paulo: Cortez, 199.

OLIVEIRA, Raul Rodrigues de. **LISTA DE EXERCÍCIOS SOBRE EQUAÇÃO E FUNÇÃO POLINOMIAL DO 1º GRAU**. Disponível em: https://exercicios.brasilescola.uol.com.br/exercicios-matematica. Acesso em: 09 out. 2022.

SANTOS, Tayna Elias dos. **ESTUDO DA FUNÇÃO AFIM**. Disponível em: https://www.escolaweb.educacao.al.gov.br/roteiro-de-estudo/estudo-da-funcao-afim-55621. Acesso em: 11 out. 2022.

6.2. RELATÓRIO DO ENCONTRO II.

Número de alunos: 17 alunos.

Conteúdo desenvolvido na aula: Equações e funções do primeiro grau.

Neste segundo encontro estiverem presentes 17 discentes, sendo que 16 deles chegaram no horário pré-estabelecido e apenas um chegou atrasado, perto do horário do intervalo. A sala de aula já estava organizada para que os discentes se sentassem em grupos de quatro alunos e trabalhassem nesses grupos durante todo o encontro.

Inicialmente fizemos o comunicado solicitado pela professora orientadora de que o Promat seguirá por mais cinco encontros além dos cinco já estabelecidos anteriormente e deixamos aberto para os alunos decidirem se querem fazer os cinco encontros adicionais. Em seguida, fizemos a chamada para verificarmos o número de presentes.

Feita a chamada, começamos perguntando aos alunos quais questões da lista deixada na aula anterior eles tiveram mais dúvidas para que pudéssemos ajudá-los. Poucos alunos haviam feito os exercícios e os que fizeram tiveram dificuldades em resolvê-los. Uma aluna relatou que não havia conseguido resolver a questão 13 da lista (Anexo II), então fizemos a leitura da questão junto com a turma e anotamos os dados que o enunciado estava apresentando. Após chegarmos em uma equação, pedimos que os alunos resolvessem está equação, já que o conteúdo explorado nesse segundo encontro foi equações do primeiro grau e o jogo ‘Bingo das Funções’, trabalhando funções afim. Ao acompanharmos os alunos nos grupos durante a resolução, percebemos muita dificuldade da turma no geral em perceber onde seria possível fazer simplificações para deixar a equação mais fácil de ser resolvida, então fomos ao quadro e explicamos como aquela equação poderia ser solucionada. Terminada a correção, perguntamos se havia ficado alguma dúvida sobre o exercício e os alunos confirmaram que não. Sendo assim, entregamos aos alunos a lista com as questões e problemas que trabalharíamos durante a aula (Anexo IV e Anexo V).

Após isso, começamos abordar o conceito de equações do primeiro grau. Definimos, no quadro, o que é uma equação e relembramos o que é uma incógnita e, em seguida, demos um exemplo de equação do primeiro grau.

$$2 \cdot x + \frac{5}{3} = x + \frac{13}{3}$$

Usamos *'x'* como incógnita e pedimos que os alunos resolvessem a equação encontrando o valor de *'x'*. Nenhum aluno apresentou dificuldade na resolução desse exemplo, então fizemos uma correção coletiva no quadro, escrevendo o que os alunos nos diziam para juntos chegarmos à solução.

Como não percebemos dificuldades dos alunos na resolução de equações do primeiro grau, partimos para a definição de sistemas de equações lineares do primeiro grau. Explicamos que agora trabalharíamos com mais de uma equação ao mesmo tempo e então lemos com a turma a Situação Problema 3 do 'Anexo V'.

Utilizamos dois métodos de resolução para está situação, ambos sugeridos por dois alunos. Primeiro resolvemos no quadro usando o método da substituição e depois usando o método da adição. Ao término da resolução e explicação, fizemos o intervalo de 20 minutos.

Ao retornar do intervalo, pedimos que um dos alunos lesse o Problema 2 do 'Anexo V' e desta vez deixamos que os alunos pensassem e resolvessem o problema discutindo-o com os colegas nos grupos. Passamos nos grupos e percebemos grande dificuldade na interpretação do problema e na montagem do sistema de equações que resolveria o problema. Muitos alunos consideraram que a soma das idades da mãe e da filha seria 56 anos hoje, quando o enunciado diz que está soma acontece apenas daqui a dois anos, ou seja, a equação correta a ser encontrada era $(x + 2) + (y + 2) = 56$. A maioria dos alunos acabou encontrando a equação $x + y = 56$. Entendendo essa dificuldade, fizemos a interpretação em conjunto com a turma e construímos o sistema de equações que resolveria o problema. Então deixamos mais alguns minutos para que os alunos resolvessem o sistema de equações. A partir daí os alunos usaram predominantemente o método da substituição para resolução do sistema, porém alguns preferiram usar o método da adição. Percebendo que a maioria dos alunos teve facilidade de resolver o sistema, fizemos a correção no quadro, explicando novamente a interpretação correta do problema, visto que a maior dificuldade dos alunos estava ligada a extração de informações do enunciado e não na resolução do sistema de equações.

Posteriormente, apresentamos o jogo ‘Bingo das Funções’, explicamos as regras e entregamos uma cartela e uma folha sulfite para cada aluno, conforme explicitado no plano de aula. Nesta atividade, dois de nós, estagiários sorteávamos os números enquanto os outros dois acompanhavam os alunos nos grupos. Observamos que conforme as rodadas passavam, maior a rapidez e facilidade dos alunos em resolver a função. A interação entre os alunos com os colegas de grupo também foi muito maior durante está atividade do que nas resoluções de questões e nas exposições de conceitos, a grande maioria buscava se ajudar mutualmente entre os grupos. Após definirmos os três primeiros colocados da dinâmica, encerramos a atividade.

Para finalizar o encontro, pedimos que os alunos resolvessem a lista de atividades (Anexo IV e Anexo V) e trouxessem as dúvidas para o próximo encontro, onde iremos continuar a tratar de função, desta vez formalizando o conteúdo trabalhado no jogo.

7. ENCONTRO III.

7.1. PLANO DE AULA - Encontro III – 22/10/2022.

Público-alvo: Alunos do 3º ano do Ensino Médio da rede pública estadual do Paraná.

Estagiários: Adrian Zanardi, Alexsandro André Alves de Freitas, Márcio Rocha e Meirielly Fernandes de Lima.

Conteúdos: Função afim.

Objetivo geral: Relembrar os conceitos de funções como relação de dependência unívoca entre duas variáveis, bem como suas representações numérica, algébrica e gráfica.

Objetivos específicos:

- Compreender as diferenças entre equações e funções do primeiro grau.
- Escrever a lei de formação de uma função a partir de uma situação-problema.
- Analisar comportamento gráfico de uma função afim no plano cartesiano.
- Construir o gráfico cartesiano de uma função dada.
- Distinguir coeficiente linear e coeficiente angular
- Reconhecer domínio e imagem de uma função do primeiro grau.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 4 horas.

Recursos didáticos:

Quadro, giz, atividades impressas, lápis, borracha, caderno.

Encaminhamento metodológico:

Iniciaremos recebendo os alunos, a sala estará organizada de modo que os alunos formem grupos com quatro integrantes durante o encontro. Faremos a chamada e usaremos cerca de 30 minutos para tirarmos dúvidas e resolvermos questões da lista do Encontro 2 (Anexo IV e Anexo V).

(*35 minutos)*

Em seguida, entregaremos a lista do Encontro 3 (Anexo VII e Anexo VIII), e relembraremos a atividade da aula passada, o bingo das funções. A partir dela, abordaremos as diferenças entre funções e equações, o que cada variável representa (variável dependente e independente). Trabalharemos os conceitos a partir do seguinte Problema (Anexo VI).

(25 minutos)

Problema 1. O salário de um vendedor é composto de uma parte fixa no valor de R$ 800,00, mais uma parte variável de 12% sobre o valor de suas vendas no mês. Caso ele consiga vender R$ 450,00 em produtos, calcule o valor de seu salário.

Resolução proposta:

A equação que representa a situação será:

$$y = \frac{12}{100}x + 800$$

Se o vendedor vendeu R$ 450,00, temos:

$$y = \frac{12}{100} \cdot 450 + 800$$

$$y = \frac{12}{10} \cdot 45 + 800$$

$$y = \frac{540}{10} + 800$$

$$y = 54 + 800$$

$$y = 854$$

Ou seja, o salário do vendedor será de R$ 854,00. Houve um acréscimo de R$ 54,00 de acordo com as vendas que ele fez.

Durante a resolução, definiremos o que é função polinomial ou afim, explicando o que foi conceituado.

Função Afim: Chama-se função polinomial do 1º grau ou função afim, qualquer função f de $\mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ dada por uma lei da forma $f(x) = ax + b$, em que a e b são números reais dados e $a \neq 0$. Na lei $f(x) = ax + b$, o número a é chamado coeficiente de x e o número b é chamado termo constante ou independente.

10 minutos

Problema 2. Uma loja virtual vende camisetas ao custo de R$ 60,00 a unidade com frete no valor de R$ 20,00. Qual a lei de formação da função? Quanto custará uma compra de 5 camisetas

Resolução proposta

Lei de formação

$$y = 60.x + 20$$

Comprando 5 camisas, teremos

$$y = 60.5 + 20$$

$$y = 300 + 20$$

$$y = R\$\,320.$$

Resolvido o problema, solicitaremos aos alunos que pensem e criem um problema matemático que envolva a função afim $y = 3.x - 1$, trabalhada no ‘Bingo das Funções’ do Encontro anterior. Concederemos de cinco a dez minutos para que os grupos elaborem o problema. Transcorrido esse tempo, cada grupo deverá apresentar o problema elaborado para classe.

15 minutos

Após isso, definiremos função linear e constante e daremos alguns exemplos no quadro, perguntando aos alunos que tipo de função é dada em cada exemplo. Caso os alunos não consigam identificar as funções, retomaremos os conceitos explicados no início do encontro.

Função Linear:

Sendo um caso particular da função afim em que $b = 0$. Nesse caso, temos a função afim f de $\mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ dada pela lei $f(x) = ax$ com $a \neq 0$, que recebe a denominação especial de função linear.

Função Constante:

Quando em $y = ax + b$, temos $a = 0$, essa lei não define uma função afim, mas sim uma função denominada de função constante. Uma função f de $\mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ dada pela lei $y = 0x + b$ para todo x.

Exemplos. Escreva ao lado das funções quais delas são afim, lineares ou constantes.

- $f(x) = 3x$ (linear)
- $f(x) = 2x + 1$ (afim)
- $f(x) = 3x + 4 - 4$ (linear)
- $f(x) = 5$ (constante)
- $f(x) = 0x - 6$ (constante)
- $f(x) = -3x - 12$ (afim)

(15 minutos)

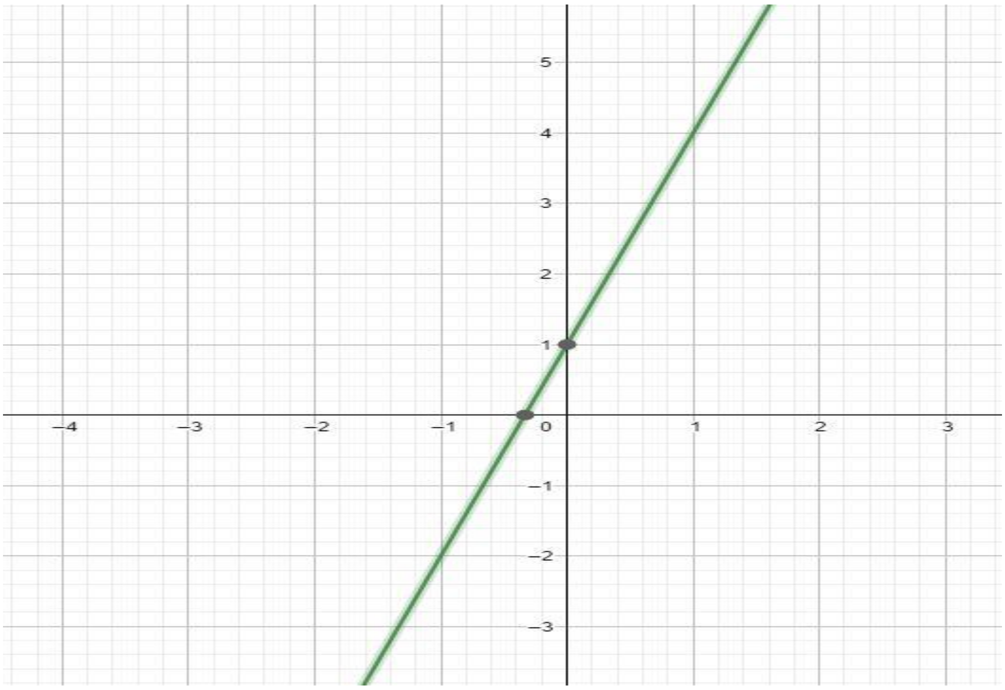
Terminados os exemplos, teremos 20 minutos de intervalo.

Retornando do intervalo, iniciaremos apresentando como identificar quando uma função afim é crescente ou decrescente e em seguida explicaremos o que é o coeficiente angular e o coeficiente linear em uma função afim. Para isso, colocaremos alguns gráficos no quadro e questionaremos os alunos se o gráfico é crescente, decrescente ou constante.

A seguir, no quadro, apresentaremos outros gráficos, que representem as funções já trabalhadas durante a aula e pediremos que os alunos indiquem, oralmente, quais são os coeficientes da função, se ela é crescente ou decrescente, seu domínio e sua imagem. Em seguida, definiremos formalmente o que é uma função crescente, decrescente e constante, bem como o que são os coeficientes linear e angular.

Exemplos.

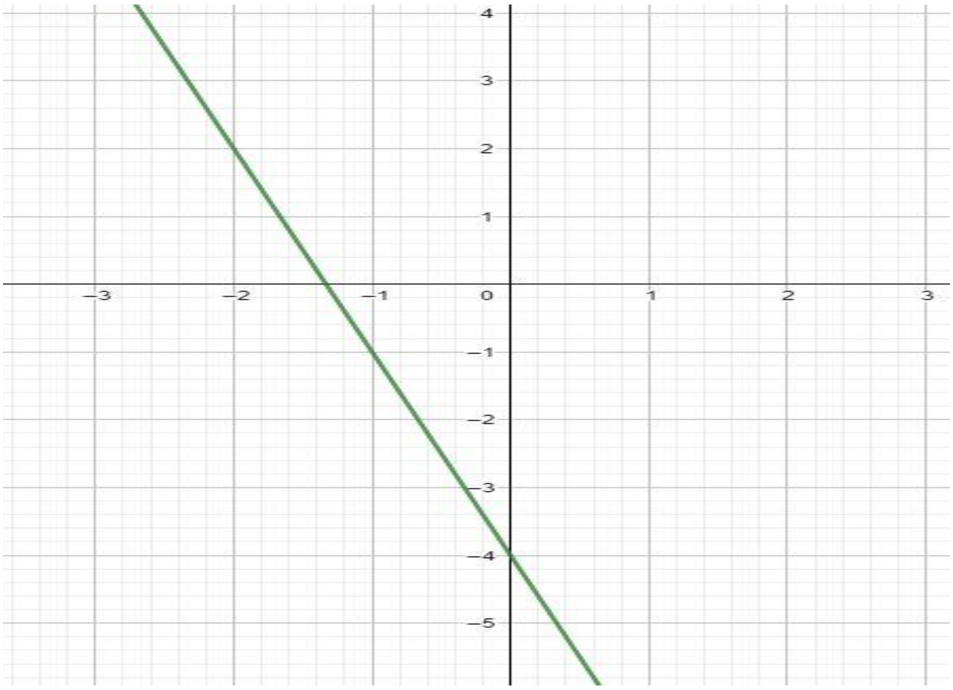
Figura 3 - Exemplo de gráfico de função afim.



Fonte: os autores. Criado em 16 out. de 2022.

Resolução proposta: Está é uma função crescente com coeficiente linear igual a 1 e coeficiente angular igual a 3. Seu domínio são todos os reais, assim como sua imagem.

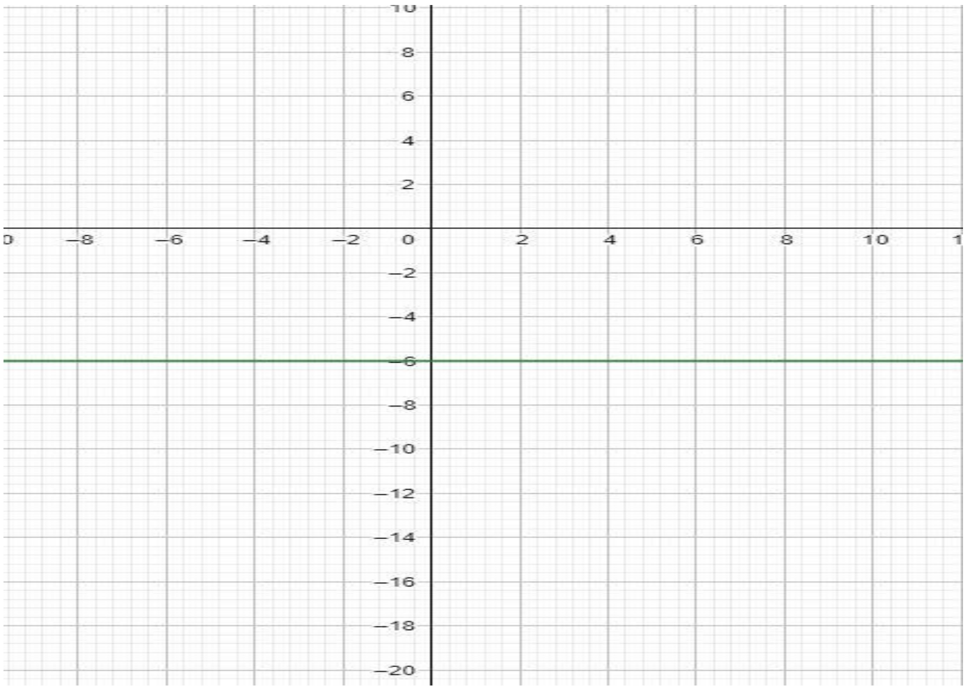
Figura 4 - Exemplo de gráfico de função afim.



Fonte: os autores. Criado em 16 out. de 2022.

Resolução proposta: Está é uma função decrescente com coeficiente linear igual a -4 e coeficiente angular igual a -3. Seu domínio são todos os reais, assim como sua imagem.

Figura 5 - Exemplo de gráfico de função afim.



Fonte: os autores. Criado em 16 out. de 2022.

Resolução proposta: Está é uma função constante com coeficiente linear igual a -6 e coeficiente angular igual a 0. Seu domínio são todos os reais e sua imagem contém apenas o -6.

A seguir, pediremos que os alunos voltem a esses exemplos e escrevam a lei de formação de cada um deles a partir do gráfico. Serão dados oito minutos para que os alunos façam isso com nosso auxílio individual e em seguida, será feita a correção no quadro. Pediremos que os alunos se voluntariem a fazer as resoluções no quadro.

40 minutos

Subsequentemente, faremos a leitura da Situação problema 2 da lista dos alunos e pediremos que os alunos a resolvam. Iremos passar pelos grupos auxiliando os alunos individualmente durante 15 minutos e em seguida, faremos uma resolução coletiva no quadro. Pediremos que algum aluno voluntário mostre sua resolução para os colegas.

30 minutos

Problema 3. Uma pessoa vai escolher um plano de saúde entre duas opções: A e B.

Abaixo estão as condições dos planos:

- Plano A: cobra um valor fixo mensal de R$ 140,00 e R$ 20,00 por consulta num certo período.
- Plano B: cobra um valor fixo mensal de R$ 110,00 e R$ 25,00 por consulta num certo período.

Temos que o gasto total de cada plano é dado em função do número de consultas x dentro do período preestabelecido.

a) Determine a função correspondente a cada plano.

b) Em qual situação o plano A é mais econômico? E o plano B? Quando os dois se equivalem?

c) Construa o gráfico das funções para verificar a resposta anterior.

Resolução proposta:

a) Identificando que o valor fixo do plano se trata do coeficiente linear e os valores das consultas são o coeficiente angular de uma função temos:

Para o plano A:

$$y_A = 20x + 140$$

Para o plano B:

$$y_B = 25x + 110$$

b) Se em um certo período não ser feito nenhuma consulta, o plano B é mais econômico que o plano A devido ao valor fixo menor.

Ao ser feito uma consulta, temos:

Para o plano A:

$$y_A = 20 \cdot 1 + 140$$

$$y_A = 20 + 140$$

$$y_A = 160$$

Para o plano B:

$$y_B = 25 \cdot 1 + 110$$

$$y_B = 25 + 110$$

$$y_B = 135$$

Logo, o plano B continua sendo mais econômico que o plano A.

Isso continuará a acontecer até que determinemos em qual momento os dois planos terão o mesmo valor.

Para descobrir, temos que igualar as duas funções:

$$20x + 140 = 25x + 110$$

$$25x - 20x = 140 - 110$$

$$5x = 30$$

$$x = \frac{30}{5}$$

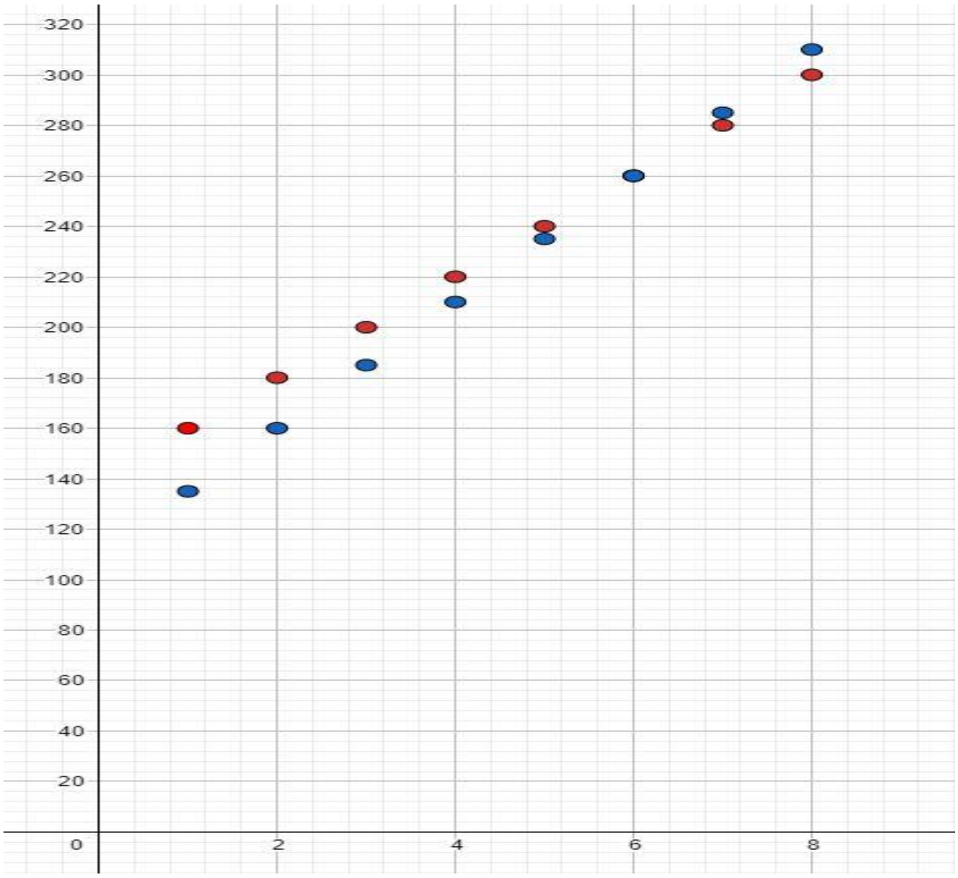
$$x = 6$$

Então, os dois planos terão o mesmo valor quando feito 6 consultas.

Portanto, o plano B é mais vantajoso quando feito até 5 consultas, e o plano A é mais vantajoso quando feito 7 ou mais consultas.

c)

Figura 6 - Função de problema no Geogebra.



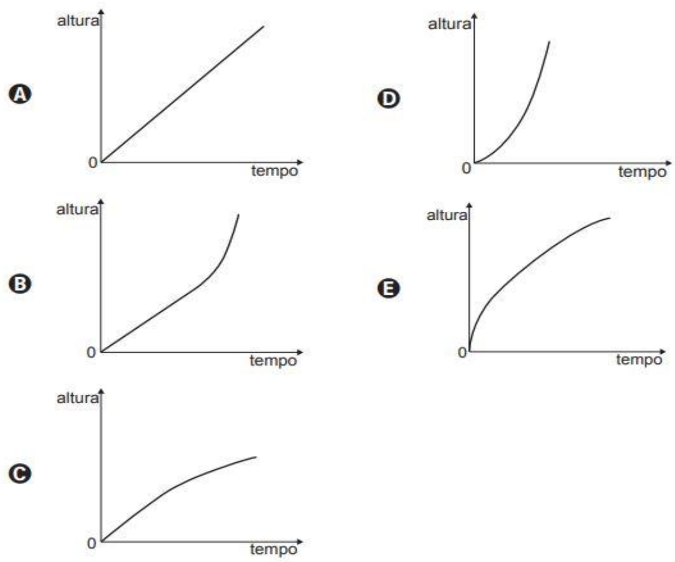
Fonte: os autores. Criada em 16 out. de 2022

Posterior a isso, faremos a resolução da questão 1 do Anexo VIII, em conjunto com os alunos.

10 minutos

Problema 4. (ENEM 2021) O consumo de espumantes no Brasil tem aumentado nos últimos anos. Uma das etapas do seu processo de produção consiste no envasamento da bebida em garrafas semelhantes às da imagem. Nesse processo, a vazão do líquido no interior da garrafa é constante e cessa quando atinge o nível de envasamento.

Qual esboço de gráfico melhor representa a variação da altura do líquido em função do tempo, na garrafa indicada na imagem?



Resolução proposta: O exercício quer saber **qual esboço de gráfico melhor representa a variação da altura do líquido em função do tempo, na garrafa indicada na imagem.** Para isso vamos ter de analisar a garrafa.

Percebe-se que até certo ponto não temos uma variação no raio da garrafa. Como não temos uma variação no raio, o aumento no nível da água será linear. Isto é, a cada instante que entra líquido ele aumenta o nível na mesma proporção. A partir do momento em que o **raio começa a diminuir**, no caso a partir da linha vermelha, o **nível da água começa a subir mais rápido.** Sendo assim, temos que o gráfico irá crescer com uma reta, e a partir da linha vermelha uma função exponencial.

O gráfico que representa isso é o da alternativa B.

A seguir, pediremos que os alunos tentem fazer o Problema 5 do Anexo VIII, desta vez buscando interpretar o problema com a ajuda dos colegas do grupo e resolvê-lo. Faremos a correção após terem sido transcorridos dez minutos.

20 minutos

Problema 5. (ENEM 2014 - Adaptada) Os sistemas de cobrança dos serviços de táxi nas cidades A e B são distintos. Uma corrida de táxi na cidade A é calculada pelo valor fixo da bandeirada, que é de R$ 3,45, mais R$ 2,05 por quilômetro rodado. Na cidade B, a corrida é calculada pelo valor fixo da bandeirada, que é de R$ 3,60, mais R$ 1,90 por quilômetro rodado. Uma pessoa utilizou o serviço de táxi nas duas cidades para percorrer a mesma distância de 6 km.

Qual o valor que mais se aproxima da diferença, em reais, entre as médias do custo por quilômetro rodado ao final das duas corridas?

Resolução proposta:

Na cidade A

$$P_a = 3{,}45 + 2{,}05 \times 6 = R\$15{,}75$$

$$M_a = \frac{15{,}75}{6} = 2{,}63$$

Na cidade B

$$\mathrm{P}_b = 3{,}60 + 1{,}90 \times 6 = R\$15{,}00$$

$$M_b = \frac{15}{6} = 2{,}5$$

Logo, ficamos com

$$2{,}63 - 2{,}5 = 0{,}13R\$$$

Para finalizar, questionaremos os alunos sobre as dúvidas que tiverem e retomarem os conceitos necessários para esclarecê-las.

Avaliação:

A avaliação será realizada de forma contínua no decorrer da aula, na qual será avaliada a desenvoltura dos alunos ao responder os questionamentos realizados pelos estagiários.

Referências Bibliográficas:

LENZ, Eduardo César. **Ensino de potência**. Disponível em: https://ensinodepotencia.com.br/. Acesso em: 17 out. 2022.

IEZZI, Gelson *et al*. **MATEMATICA**: ciência e aplicações. 7. ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

OLIVEIRA, Lays Curcio Guimarães. **Podemos desenhar uma função?** Disponível em: https://novaescola.org.br/planos-de-aula/fundamental/9ano/matematica/podemos-desenhar-uma-funcao/845. Acesso em: 17 out. 2022.

SILVA, Marcos Noé Pedro da. **Aplicações de uma Função de 1º grau**. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/aplicacoes-uma-funcao-1-grau.htm. Acesso em: 16 out. 2022.

SILVA, Marcos Noé Pedro da. **Problemas envolvendo funções do 1º grau**. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/problemas-envolvendo-funcoes-1-grau. Acesso em: 16 out. 2022.

7.2. RELATÓRIO DO ENCONTRO III.

Número de alunos: 15 alunos.

Conteúdos desenvolvido na aula: Função afim.

No terceiro encontro estiveram presentes 15 alunos, no decorrer da aula uma aluna teve que se ausentar, informando nós estagiários. Uma aluna foi para o intervalo e não retornou, além disso não nos informou motivo algum para ter se ausentado da segunda parte do Encontro. Um aluno, como citados nos relatórios anteriores, chegou atrasado, então conversamos com o mesmo que nos informou que precisa deixar seu marido no trabalho, o que interfere no seu horário de chegada ao PROMAT.

Iniciamos a aula recebendo os alunos e os alocando em grupos, então demos início com a retomada da Lista do Encontro II, tirando as dúvidas pertinentes e relembrando conceitos trabalhados, foi então resolvido duas questões da lista no quadro com o auxílio dos alunos. Notamos que a grande maioria dos alunos fizeram a lista ou tentaram resolvê-la o que pode fixar ainda mais os conteúdos abordados anteriormente.

Com a aula iniciada foi entregue aos alunos a lista do Encontro (Anexo VI e Anexo VII), então demos sequência no conteúdo que fora trabalhado em aula, iniciamos com a apresentação da diferença entre função e equação, bem como os conceitos de domínio, imagem e contradomínio, além de suas diferenças forma abordados os conceitos de função afim, função linear e função constante. A abordagem para tratar dos conceitos foi com a resolução de uma situação problema da lista (Problema 1), com o decorrer da demonstração dos conceitos observamos que os alunos estavam sem foco, alguns utilizando celular e fone e outros desenhando com caneta em seus braços.

Após as abordagens dos conceitos a partir da situação problema, foi tratada uma outra situação problema da lista (problema 2) e então foi resolvida no quadro, visando relembrar os conceitos abordados e a intepretação do problema passo a passo. Notamos que os alunos ainda estavam sem foco e alguns momentos os estagiários pediram foco e atenção para que fossem compreendidos os conteúdos, sendo que após a resolução do problema, os alunos foram liberados para o intervalo.

No retorno do intervalo, os alunos iniciaram uma atividade para identificar as funções que foram expostas no quadro, com essa atividade foi abordado o comportamento de cada função no plano cartesiano. Representar as funções no plano cartesiano foi o conteúdo em sala que mais trouxe dúvidas e questionamentos, então nós, os estagiários que estávamos andando pela sala auxiliamos os alunos individualmente dentro dos grupos. Após a atividade foi trazido um gráfico e então foi apresentado aos alunos como dado um gráfico e seus pontos, é possível encontrar sua lei de formação, novamente os alunos trouxeram dúvidas e tiveram bastante dificuldades.

Encerrada a apresentação do plano cartesiano, trabalhamos com mais uma situação problema da lista (Problema 3), dessa vez os alunos tiveram um tempo de dez minutos para a resolução, durante esse tempo ocorreu que todos os alunos apresentaram dúvidas sobre os conceitos abordados em sala, então a situação problema começou a ser resolvida no quadro. Com a Situação Problema 3 os estagiários cometeram um erro ao apresentá-la no plano cartesiano, o qual seria um gráfico de pontos e não uma reta, então a orientadora interveio em sala abordando as diferenças. Um ponto que notamos no decorrer da aula foi certa falta de foco dos alunos, com pouca interatividade. O fato de a aula ter sido pautada por definições, conceitos e problemas pode ter contribuído para isso.

Terminado os conteúdos previstos e feito um fechamento do que foi trabalhado no encontro, foi entregue aos alunos que obtiveram o 1°, 2° e 3° lugar do Bingo das Funções tratada na aula anterior uma caixa de bombom. Finalizando o encontro, acompanhamos os alunos para apresentar a sala que estaremos alocados no próximo encontro e então foram liberados.

8. ENCONTRO IV.

8.1. PLANO DE AULA - ENCONTRO IV – 29/10/2022.

Público-alvo: Alunos do 3º ano do Ensino Médio da rede pública estadual do Paraná.

Estagiários: Adrian Zanardi, Alexsandro André Alves de Freitas, Márcio Rocha e Meirielly Fernandes de Lima.

Conteúdos: Equações e funções do segundo grau.

Objetivo geral: Revisar os conceitos de função quadrática.

Objetivos específicos:

- Compreender o conceito de função quadrática;
- Interpretar problemas cotidianos e identificar pontos de máximo e mínimo das funções;
- Resolver equações do segundo grau;
- Construir gráficos cartesianos de funções quadráticas;

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 4 horas.

Recursos didáticos:

Quadro, giz, atividades impressas, lápis, borracha, caderno, computadores.

Encaminhamento metodológico:

Iniciaremos recebendo os alunos no laboratório de informática, que estará organizado para que os alunos trabalhem individualmente durante o encontro. Faremos a chamada e usaremos cerca de 30 minutos para tirarmos dúvidas e resolvermos questões da lista do Encontro 3 (Anexo VI e Anexo VII).

35 minutos

Em seguida, começaremos a trabalhar função quadrática a partir de um jogo, o **‘Caça palavras das funções’.**

Resumo do jogo:

- Os alunos irão jogar de forma individual;
- Será entregue uma folha para cada aluno contendo 5 funções distintas;
- Na folha teremos uma linha contendo 10 lacunas para serem preenchidas com letra;
- Abaixo da folha estará um quadro com as letras do alfabeto e cada letra terá um número correspondente;
- Os alunos realizarão a operação da função e encontrarão os valores para a imagem.
- Em seguida, localizarão a letra correspondente ao valor encontrado.
- E então, os alunos preencherão as lacunas com as letras.
- Ganhará o jogo aquele que preencher a palavra com o menor tempo.

(15 minutos)

Terminado o jogo, será entregue a lista do Encontro 4 (Anexo VIII e Anexo IX), contendo os problemas que serão trabalhados durante o encontro, bem como as definições de função polinomial do segundo grau e raízes de uma função do segundo grau. Uma vez que os alunos estiverem com a Lista, apresentaremos o primeiro problema, a partir do qual traremos definições e conceitos de função quadrática.

Problema 1. (IFSC 2017- Adaptada) Pedro é pecuarista e, com o aumento da criação, ele terá que fazer um novo cercado para acomodar seus animais. Sabendo-se que ele terá que utilizar 5 voltas de arame farpado e que o cercado tem forma retangular cujas dimensões são as raízes da equação $x^2 - 45x + 500 = 0$, qual a quantidade mínima de arame que Pedro terá que comprar para fazer esse cercado?

Resolução proposta:

Para encontrarmos as raízes da função, calcularemos o delta e utilizaremos a fórmula de Bhaskara

$$x^2 - 45x + 500 = 0$$

$$a = 1, b = -45 \; e \; c = 500$$

Calculando delta:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-45)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (500)$$

$$\Delta = 2025 - 2000$$

$$\Delta = 25$$

Pela fórmula quadrática:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-45) \pm \sqrt{25}}{2(1)}$$

$$x = \frac{45 \pm 5}{2}$$

$$x' = \frac{45 + 5}{2} = 25$$

$$x' = \frac{45 - 5}{2} = 20$$

Sabendo que as dimensões são 20m e 25m e como o perímetro é dado por: $P = 2x + 2y$, sendo convencionado $x = 20\ e\ y = 25$, então teremos:

$$P = 2(20) + 2(25)$$

$$P = 40 + 50$$

$$P = 90\ metros$$

Como serão cinco voltas de arames, logo encontraremos:

$$quantidade\ mínima\ de\ arame = 5\ voltas\ x\ perímetro$$

$$quantidade\ mínima\ de\ arame = 5 \times 90$$

$$quantidade\ mínima\ de\ arame = 450\ metros$$

Serão dados dez minutos para que os alunos interpretem e resolvam o problema com nosso auxílio individual e, em seguida, definiremos o que é uma função polinomial do segundo grau e o que são as raízes de uma equação. Após definirmos, apresentaremos a fórmula utilizada para encontrar as raízes da equação conhecida como fórmula resolutiva de equações quadrática ou fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sendo $b^2 - 4ac$ igual a delta (Δ) ou**:**

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Relembraremos que quando Δ é positivo, há duas raízes reais e distintas, quando Δ é zero, há duas raízes reais iguais (ou uma raiz dupla), quando Δ é negativo, não há raiz real.

Relembrados esses conceitos, faremos a resolução do problema no quadro.

30 minutos

Subsequentemente, escreveremos no quadro algumas funções quadráticas e pediremos que os alunos digam, oralmente, seus coeficientes e características que podem extrair da função olhando para sua lei de formação.

Exemplos:

- $f(x) = x^2 - 5x + 4$
- $f(x) = -2x^2 + 4x - 8$
- $f(x) = x^2 - 1$
- $f(x) = -4x^2 - 2x$
- $f(x) = 9x^2$

Utilizaremos o primeiro exemplo do quadro e, a partir dele pediremos que os alunos encontrem as raízes da função.

Exemplo:

Encontre as raízes de $f(x) = x^2 - 5x + 4$

Resolução proposta:

Para encontrarmos as raízes, precisamos identificar os coeficientes *a, b* e *c.*

$$(a = 1, \qquad b = -5, \qquad c = 4)$$

Calculando o valor de Delta, teremos:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4(1)(4)$$

$$\Delta = 25 - 16$$
$$\Delta = 9$$

Utilizando a fórmula quadrática encontraremos:

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2(1)}$$

Como teremos dois valores para, chamaremos de *x’* para o valor positivo obtido na raiz *e x’’* valor para o valor negativo obtido na raiz.

Para x’:

$$x' = \frac{5+3}{2}$$
$$x' = \frac{8}{2}$$
$$x' = 4$$

Para *x’’**:***

$$x'' = \frac{5-3}{2}$$
$$x'' = \frac{2}{2}$$
$$x'' = 1$$

Logo $x = 4$ ou 1.

Depois de resolvido o exemplo, perguntaremos aos alunos se eles conhecem outra maneira de calcular as raízes da equação. Caso não apresentem outra maneira, demonstraremos como encontrar as raízes através de Soma e Produto (definição em Anexo VIII).

Deixaremos mais oito minutos para que os alunos resolvam o exemplo anterior por soma e produto.

Resolução proposta:

Sendo $(a = 1,\ b = -5,\ c = 4)$, teremos pela soma:

$$x' + x'' = -\frac{b}{a}$$
$$x' + x'' = -\frac{-5}{1}$$

$$x' + x'' = 5$$

Pelo produto:

$$x' \cdot x'' = \frac{c}{a}$$

$$x' \cdot x'' = \frac{4}{1}$$

$$x' \cdot x'' = 4$$

x é igual a 4 e 1, pois são os números que somados encontraremos 5 e multiplicados obteremos 4.

(20 minutos)

Terminada a resolução, questionaremos os alunos acerca das dúvidas sobre o conteúdo visto até o momento na aula, qual método de resolução eles preferem utilizar e relembraremos os conceitos disserem ter dúvidas.

Terminada a atividade, faremos os 20 minutos de intervalo previstos.

Retornando do intervalo, pediremos que os alunos trabalhem em dupla na próxima atividade e leremos outro problema da lista.

Para auxiliar no estudo do problema, cada dupla receberá um pedaço de barbante de 60 cm de comprimento, simulando os 60 metros de cerca. Receberão também régua e algumas questões que servirão como base para orientar a atividade.

Problema 2. Determinado fazendeiro pretende construir uma cerca em formato retangular utilizando 60 metros lineares de cerca. Quais medidas desse retângulo irão tornar a área cercada maior possível?

a) Escreva a função que mostra a área do cercado $A(x)$ variando de acordo com a medida do comprimento de um dos seus lados x.

b) A partir da função encontrada, complete a tabela com valores para os lados do cercado e respectivas áreas. Para cada situação, construa com o barbante o resultado equivalente.

x		A(x)
comprimento (m)	**largura (m)**	**Área (m²)**

c) Desenhe o gráfico da função encontrada no item a. Utilize os pares ordenados encontrados no item b. Utilize também as raízes da função.

d) Determine o ponto de máximo da função.

e) Qual o valor para x que torna a área máxima? Discuta sobre o resultado.

Para auxiliar no estudo do problema, cada dupla receberá um pedaço de barbante de 60 cm de comprimento, simulando os 60 metros de cerca. Receberão também régua e algumas questões que servirão como base para orientar a atividade.

Resolução proposta:

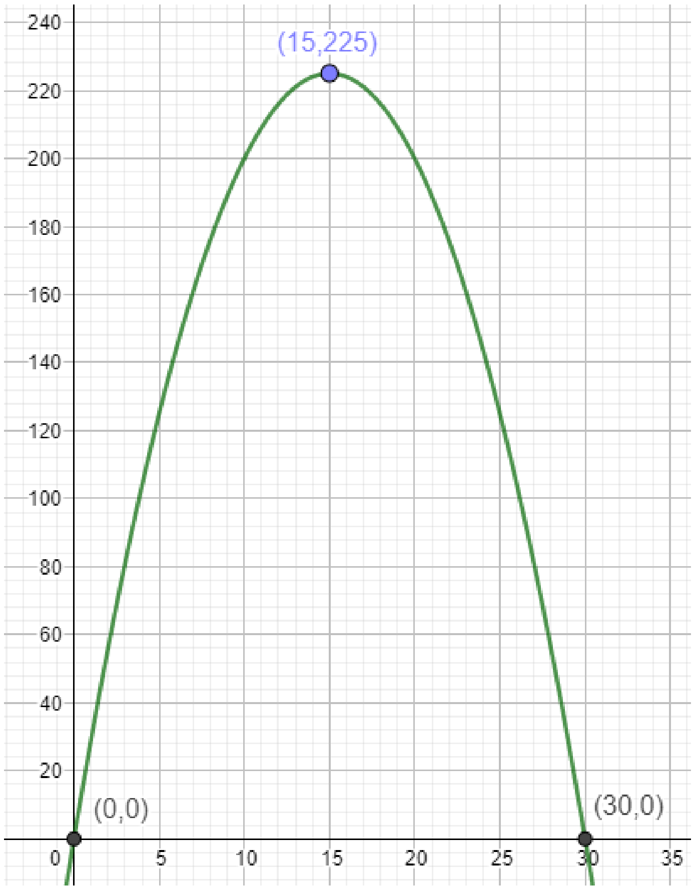
a) Considerando que um dos lados mede x, o outro lado deve medir 30 – x. Multiplicando um lado pelo outro encontra-se a função procurada.

$$A(x) = x \cdot (30 - x)$$

$$A(x) = -x^2 + 30x$$

b) Espera-se que os alunos preencham a tabela com valores variados de comprimento e largura, para observarem a diferença no aproveitamento de área em função dessas dimensões.

c) O gráfico abaixo possui as raízes e o ponto de máximo da função:



d) As coordenadas do ponto de máximo podem ser calculadas a partir das seguintes fórmulas, para x e y:

$$x_v = \frac{-b}{2a} \quad e \quad y_v = \frac{-\Delta}{4a}$$

$$x_v = \frac{-30}{2 \cdot (-1)} \quad e \quad y_v = \frac{-900}{4 \cdot (-1)}$$

$$x_v = \frac{-30}{-2} \quad e \quad y_v = \frac{-900}{-4}$$

$$x_v = 15 \quad e \quad y_v = 225$$

Portanto, o ponto de máximo da função será o ponto com as coordenadas (15,225), mostrado no mapa da questão anterior.

e) Ao adotar $x = 15$, a área do cercado em questão será a maior possível, $225\ m^2$, pois suas medidas serão de 15 m × 15 m.

30 minutos

Terminada a atividade, pediremos que os alunos liguem os computadores do laboratório para construirmos alguns gráficos de funções quadráticas utilizando o *software* Geogebra. Primeiro, apresentaremos alguns comandos básicos do *software*, como onde e como digitar uma função. Após essa pequena introdução, pediremos que, no Geogebra, os alunos construam algumas funções.

Exemplos:

- $f(x) = x^2 - 1$
- $f(x) = -4x^2 - 4x - 1$
- $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$

A partir destes exemplos, conceituaremos as concavidades das parábolas, mostrando que quando $a > 0$ a parábola tem concavidade voltada para cima e quando $a < 0$ a parábola tem concavidade voltada para baixo.

Questionaremos, então, no exemplo $f(x) = x^2 - 1$ qual é o menor valor de $f(x)$ e qual é o valor de x para o encontrarmos, sendo verificado a partir da construção do gráfico pelo software Geogebra. Em seguida, solicitaremos que indiquem qual é o maior valor para $f(x)$ no exemplo $f(x) = -4x^2 - 4x - 1$ e o valor de x para acha-lo.

A partir disso, definiremos o que é vértice da parábola (definição em anexo VIII).

(30 minutos)

Após, leremos a questão 5 da Lista de problemas do ENEM, e daremos cerca de dez minutos para os alunos pensarem na solução. Além da resolução, pediremos que os alunos construam o gráfico da função que o problema pede no Geogebra e anotem os pontos de máximo ou mínimo dela.

Problema 3. (Enem 2009 - Adaptada) um posto de combustível vende 10.000 litros de álcool por dia a R$ 1,50 cada litro. Seu proprietário percebeu que, para cada centavo de desconto que concedia por litro, eram vendidos 100 litros a mais por dia. Por exemplo, no dia em que o preço do álcool foi R$ 1,48, foram vendidos 10.200 litros.

Considerando x o valor, em centavos, do desconto dado no preço de cada litro, e V o valor, em R$, arrecadado por dia com a venda do álcool, então a expressão que relaciona V e x é:

Resolução Proposta:

Usando o raciocínio que para calcularmos o valor total arrecado V, multiplicamos o valor do litro da gasolina pelo total de litros vendidos.

$$V = Valor\ do\ Litro\ \times total\ de\ litros\ gasolina\ vendidos$$

$$V = R\$\ 1{,}50\ \times 10000\ litros\ de\ gasolina$$

Como foi informado que o a cada centavo a menos no preço da gasolina é vendido 100 litros a mais no final do dia. Se a gasolina custar R$ 1,49 (um centavo a menos ou 0,01 reais a menos), então serão vendidos 100 litros a mais. Podemos reescrever a função da seguinte maneira:

$$V = (1{,}50 - 0.01n) \times (10000\ \times 100n)$$

Utilizando a propriedade distributiva da multiplicação ou “chuveirinho” teremos:

$$V = 15000 + 150n - 100n - n^2$$

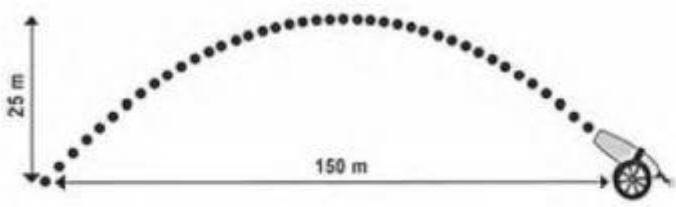
$$V = \ -n^2 + 50n + 15000$$

Dessa forma encontraremos a função que descreve o valor total arrecado por dia em função do preço por litro.

20 minutos

Após isso, leremos outra questão da Lista, a número 4, agora para abordarmos a parte gráfica, novamente daremos cerca de dez minutos para os alunos pensaremos na solução e, posteriormente, faremos a resolução. Após a resolução no quadro, pediremos novamente que os alunos construam a função no Geogebra e, desta vez, marquem um ponto no vértice da parábola e utilizem o comando de controle deslizante do *software* para observar o que acontece ao movermos este ponto e então, pediremos que movam esse ponto até que consigam estimar as raízes da equação olhando apenas para a parábola no Geogebra.

Problema 4. **(ENEM 2018)** Um projétil é lançado por um canhão e atinge o solo a uma distância de 150 metros do ponto de partida. Ele percorre uma trajetória parabólica, e a altura máxima que atinge em relação ao solo é de 25 metros.



Admita um sistema de coordenadas xy em que no eixo vertical y está representada a altura e no eixo horizontal x está representada a distância, ambas em metro. Considere que o canhão está no ponto (150; 0) e que o projétil atinge o solo no ponto (0; 0) do plano xy.

A equação da parábola que representa a trajetória descrita pelo projétil é

A) $y = 150x - x^2$

B) $y = 3750x - 25x^2$

C) $75y = 300x - 2x^2$

D) $125y = 450x - 3x^2$

E) $225y = 150x - x^2$

Resolução proposta:

As **coordenadas do vértice da parábola** são iguais a $x_v = -\frac{b}{2a}$ e $yv = -\frac{\Delta}{4a}$.

Logo, o **ponto máximo da parábola** é o ponto (75,25).

Sendo assim, temos que:

$$75 = \frac{-b}{2a}$$

$$-b = 2a.75$$

$$-b = 150a$$

$$b = -150a$$

Além disso, a **parábola** passa pelos pontos (0,0), (75,25) e (150,0). Sendo assim:

$$a.0^2 + b.0 + c = 0$$

$$c = 0$$

e

$$a.150^2 + b.150 + c = 0$$

$$22500a + 150b = 0$$

e

$$a.75^2 + b.75 + c = 25$$

$$5625a + 75b = 25$$

Substituindo o valor de $b = -150a$ na terceira equação acima, obtemos:

$$5625a + 75.(-150a) = 25$$

$$5625a - 11250a = 25$$

$$-5625a = 25$$

$$a = \frac{-1}{225}$$

Consequentemente:

$$-150.(\frac{-1}{225})$$

$$b = \frac{150}{225}$$

$$b = \frac{2}{3}$$

Portanto, a **equação da parábola** é igual a:

$$y = \frac{-x^2}{225} + \frac{2x}{3}$$

$$225y = -x^2 + 150x$$

15 minutos

Para finalizar, relembraremos os conceitos estudados na aula, questionando os alunos acerca das dúvidas que ainda restarem sobre tudo que foi apresentado durante o encontro.

5 minutos

Avaliação:

A avaliação será realizada de forma contínua no decorrer da aula, na qual será avaliada a desenvoltura dos alunos ao responder os questionamentos realizados pelos estagiários, bem como a participação durante as resoluções dos problemas propostos.

Referências Bibliográficas:

ALVES, Aroldo. **Situação Problema envolvendo Funções Quadráticas (Funções do 2º Grau)**. Disponível em: https://www.institutoclaro.org.br/educacao/para-ensinar/planos-de-aula/situacao-problema-envolvendo-funcoes-quadraticas-funcoes-do-2o-grau/. Acesso em: 21 out. 2022.

IEZZI, Gelson *et al*. **MATEMATICA**: ciência e aplicações. 7. ed. São Paulo: Saraiva, 2013

JUNIOR, Gilberto Santos. **Função polinomial do 2º grau**. Disponível em: http://joinville.ifsc.edu.br/thiago.alencar/Concomitante_eletroeletronica/FNT/apostilas/. Acesso em: 21 out. 2022.

MARTINS, Conceição Aparecida Muniz. **Função polinomial do 2º grau**. Disponível em: https://canal.cecierj.edu.br/012016/b3ce5d70a89741f3d48a977f265733d3.pdf. Acesso em: 21 out. 2022.

OLIVEIRA, Lays Curcio Guimarães. **Podemos desenhar uma função?** Disponível em: https://novaescola.org.br/planos-de-aula/fundamental/9ano/matematica/podemos-desenhar-uma-funcao/845. Acesso em: 17 out. 2022.

OLIVEIRA, Lays Curcio Guimarães. **Aprendendo função com o geogebra!** Disponível em: https://novaescola.org.br/planos-de-aula/fundamental/9ano/matematica/aprendendo-funcao-com-o-geogebra/998. Acesso em: 25 out. 2022.

OLIVEIRA, Raul Rodrigues de. **ENEM: LISTA DE EXERCÍCIOS SOBRE EQUAÇÃO E FUNÇÃO POLINOMIAL DO 2º GRAU**. Disponível em: https://exercicios.brasilescola.uol.com.br/exercicios-matematica/enem-lista-de-exercicios-sobre-equacao-e-funcao-polinomial-do-2-grau.htm. Acesso em: 25 out. 2022.

8.2. RELATÓRIO DO ENCONTRO IV.

Número de Alunos: 12 alunos.
Conteúdos desenvolvido na aula: Equação e função do segundo grau.

No quarto encontro estiveram presentes 9 meninas e 3 meninos, no decorrer da aula não tivemos nenhuma intercorrência.

Iniciamos o encontro recebendo os alunos e alocando-os de forma individual pois estávamos no laboratório de informática, com a aula iniciada nós estagiários trouxemos duas resoluções em sala junto com os alunos da lista entregue na aula anterior, notamos que alguns alunos tentaram resolvê-la, então tiramos as dúvidas pertinentes e relembramos conceitos anteriormente abordados.

A primeira atividade que abordamos foi o jogo caça palavra das funções, entregamos uma folha contendo seis funções e as letras do alfabeto com um número correspondendo cada letra e de maneira individual os alunos resolveram as funções dadas no jogo e formaram a palavra matemática, alguns alunos tiveram dificuldade de utilizar a fórmula resolutiva de equações do segundo grau, principalmente por não recordarem de como fazer operações básicas como multiplicação envolvendo números negativos, extrair raiz quadrada etc, então auxiliamos individualmente tirando esses tipos de dúvidas. Além disso, notamos que os alunos apresentaram dificuldade em identificar os coeficientes a, b e c das funções de segundo grau, então expusemos no quadro como identificar esses coeficientes, definindo-os. O jogo proposto trouxe um ambiente dinâmico em sala com a participação de todos os alunos conosco. O jogo teve apenas um ganhador que formou a palavra e resolveu as funções de maneira mais rápida.

Partindo do jogo e suas funções, abordamos com os alunos a fórmula resolutiva de equações quadráticas, identificando seus coeficientes e encontrando suas raízes. Para essa interpretação e resolução utilizamos as funções que foram trazidas no jogo. Então entregamos a lista do Encontro 4 (Anexo VIII e Anexo IX), contendo problemas que foram tratados em aula. Pudemos notar que com o decorrer da aula os alunos estavam participativos, fazendo perguntas e trazendo resoluções no quadro, quando solicitávamos.

Apresentada a fórmula de resolução da função quadrática, apresentamos aos alunos outra maneira de encontrar as raízes da função por soma e produto. Trouxemos um exemplo em quadro e apresentamos a fórmula para encontrarmos as raízes, então resolvemos junto com os alunos e tiramos as poucas dúvidas sobre o conteúdo, ao fazermos um resumo do que havia sido discutido até momento na aula. Em seguida, fizemos o intervalo.

Após a chegada do intervalo, solicitamos que os alunos formassem duplas para a apresentação do *software* Geogebra. Como as máquinas do laboratório ficam logados em apenas um usuário, conseguimos utilizar nossos usuários e de dois alunos que já tinham o usuário da Unioeste e conseguiram conectar à máquina, foram utilizadas 6 máquinas ao todo, por isso trabalhamos em duplas. Utilizando o projetor, fomos dando os direcionamentos aos alunos sobre o uso do Geogebra. Iniciamos com uma entrada de uma função quadrática utilizando o controle deslizante e vimos como ela se comportava graficamente ao alterarmos os coeficientes usando o controle deslizante. Como trouxemos algo novo, os alunos ficaram interessados e concentrados em como realizar os procedimentos e manipular, muitos se ajudavam e o ambiente em sala ficou bastante colaborativo nesse momento. Passamos outros comandos, ensinando a estimar as raízes, ponto de máximo e mínimo de uma função etc, nessa atividade houveram poucas dúvidas e todos os alunos conseguiram fazer o que era proposto. Encerrando a abordagem do Geogebra, apresentamos aos alunos os pontos de máximo e mínimo, dessa vez definindo-os no quadro.

Com os conceitos abordados e a aula tranquila e dinâmica entregamos aos alunos um barbante contendo 60cm de comprimento para a resolução da situação problema 2. Demos aos alunos os 15 minutos restantes da aula para que pudessem interpretar e resolver a situação problema. Nesse momento, nós estagiários ficamos andando em sala os auxiliando para a resolução, poucos alunos conseguiram avançar nessa atividade, por conta do tempo e da dificuldade de interpretação, percebendo isso, solicitamos que os alunos tentassem resolver o problema proposto e que tragam as dúvidas para nossa próxima aula e na sequência foram liberados.

9. ENCONTRO V.

9.1. PLANO DE AULA – ENCONTRO V – 05/11/2022.

Público-alvo: Alunos do 3º ano do Ensino Médio da rede pública estadual do Paraná.

Estagiários: Adrian Zanardi, Alexsandro André Alves de Freitas, Márcio Rocha e Meirielly Fernandes de Lima.

Conteúdos: Geometria do triângulo.

Objetivo geral: Recordar propriedades dos triângulos e aplicá-las em resoluções de situações-problema.

Objetivos específicos:

- Classificar os triângulos segundo as medidas de seus lados ou de seus ângulos internos;
- Rever propriedades e características de triângulo retângulos;
- Revisar o que são triângulos semelhantes;
- Representar os elementos de um triângulo;
- Compreender o uso do Teorema de Pitágoras para triângulos retângulos.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 4 horas.

Recursos didáticos:

Quadro, giz, atividades impressas, lápis, borracha, caderno, materiais do jogo trilha de Pitágoras.

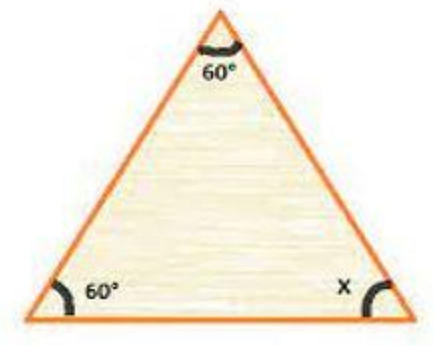
Encaminhamento metodológico:

Iniciaremos recebendo os alunos. A sala de aula estará organizada de forma que os alunos trabalhem em grupos de quatro integrantes durante o encontro. Faremos a chamada e usaremos cerca de 30 minutos para tirarmos dúvidas e resolvermos questões da lista do Encontro 4 (Anexo VIII e Anexo IX). Tiradas as dúvidas, entregaremos a lista do Encontro 5 (Anexo X e Anexo XI).

35 minutos

Após, começaremos a falar sobre algumas propriedades do triângulo, listadas abaixo, e utilizaremos um exemplo para verificarmos se os alunos recordam a propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer.

Figura 7 - Triângulo utilizado para soma dos ângulos internos.



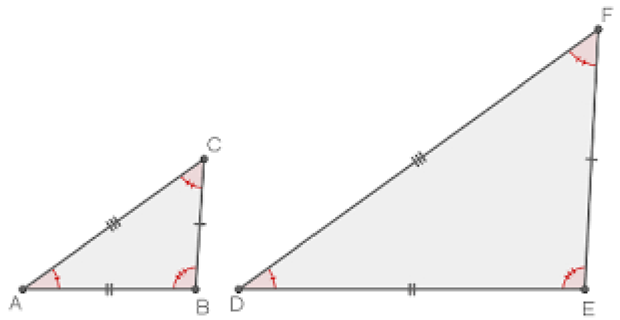
Fonte: Mundo educação – Acesso em 01 nov. 2022

Verificaremos as respostas dadas e resolveremos o exemplo definindo, no quadro, uma propriedade sobre os ângulos internos de um triângulo qualquer.

“Em qualquer triângulo, a soma de seus ângulos internos mede 180º.”

Questionaremos, a partir de outro exemplo, se dois triângulos com ângulos internos congruentes, ou seja, de mesma medida, estabelecem alguma relação de semelhança.

Figura 8 - Exemplo de triângulos semelhantes.



Fonte: Brasil Escola – Acesso 01 nov. 2022

Depois das respostas dadas, definiremos, no quadro, semelhança de triângulos:

“Dois triângulos são semelhantes quando seus ângulos correspondentes são
“Quando dois triângulos são semelhantes, a razão entre dois lados correspondentes é chamada de razão de semelhança”. $$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = K$$

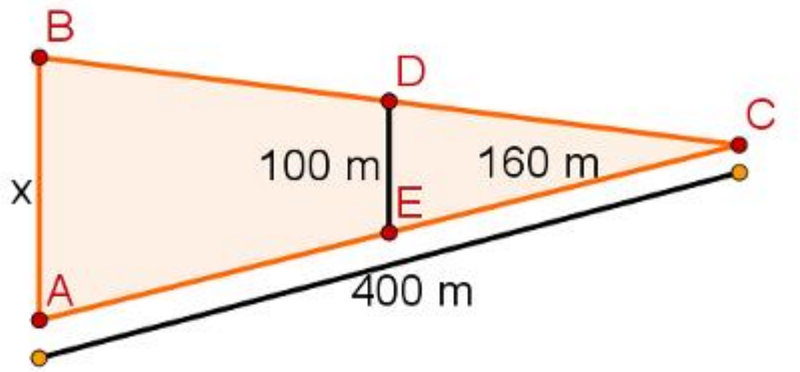
Razão de semelhança:

20 minutos

Posteriormente, iremos ler com os alunos o Problema 1 da lista para verificarmos o entendimento sobre o conteúdo explicado. Deixaremos cinco minutos para a resolução do deste Problema por parte dos alunos, com nosso auxílio nos grupos.

Problema 1. Na imagem a seguir, é possível perceber dois triângulos que compartilham parte de dois lados. Sabendo que os segmentos $\overline{BA}$ e $\overline{DE}$ são paralelos, qual a medida de x?

Figura 9 - Triângulo usado no Problema 1.



Fonte: Brasil Escola – Acesso 01 nov. 2022

Resolução Proposta:

Quando um triângulo é cortado por um segmento de reta paralelo a um de seus lados, esse segmento forma um segundo triângulo menor e semelhante ao primeiro. Usaremos a relação $\frac{DE}{AB} = \frac{CE}{AC}$ para resolvermos.

Substituindo os valores:

$$\frac{100}{x} = \frac{160}{400}$$

$$160 \cdot x = 400 \cdot 100$$

$$160 \cdot x = 40000$$

$$x = \frac{40000}{160}$$

$$x = 250\ m$$

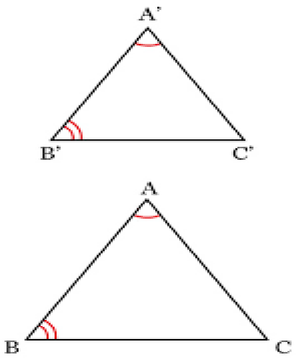
15 minutos

Finalizado a questão e resolução, definiremos brevemente, no quadro, outros critérios de semelhança:

AA (Ângulo-Ângulo)

"Se dois triângulos possuem dois ângulos respectivamente congruentes, então os triângulos são semelhantes."

Figura 10 - Triângulos semelhantes por ângulo-ângulo.

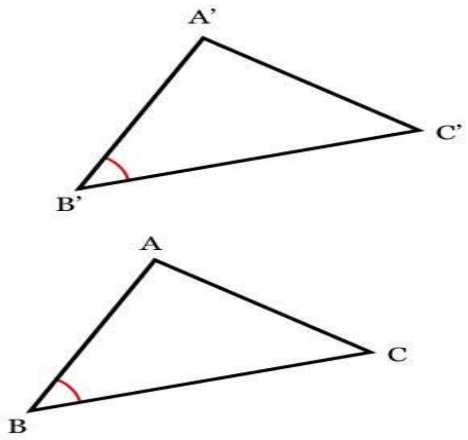


Fonte: Educa mais brasil – Acesso 01 nov. 2022

LAL (lado-ângulo-lado)

"Se dois triângulos têm dois lados correspondentes proporcionais e os ângulos compreendidos são congruentes, então os triângulos são semelhantes."

Figura 11 - Triângulos semelhantes por LAL

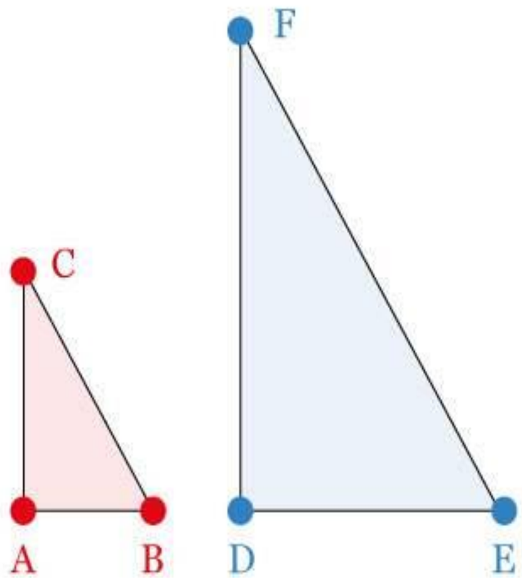


Fonte: Educa mais brasil – Acesso 01 nov. 2022

LLL (lado-lado-lado)

"Se dois triângulos têm os lados correspondentes proporcionais, então os triângulos são semelhantes."

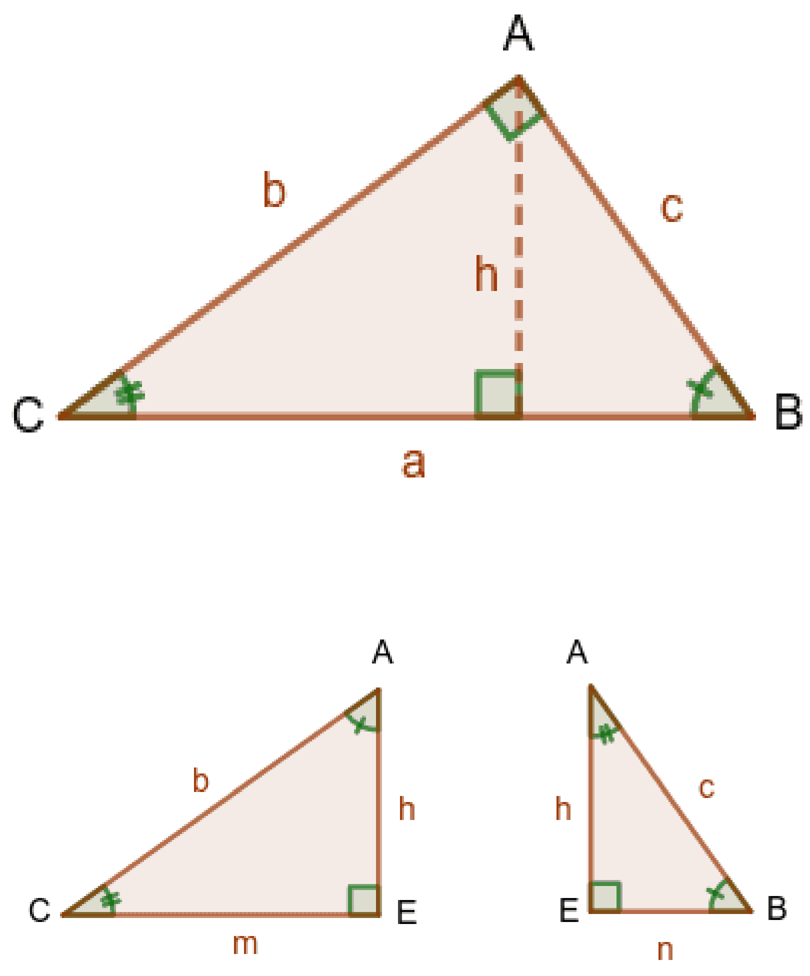
Figura 12 - Triângulos semelhantes por LLL



Fonte: Educa mais brasil – Acesso 01 nov. 2022

Utilizaremos outro exemplo e questionaremos se existe semelhança dos triângulos abaixo.

Figura 13 - Exemplo de semelhança.



Fonte: Mundo Educação – Acesso em 01 nov. 2022

Após interação com os alunos, demonstraremos as semelhanças.

Resolução proposta:

No triangulo maior ABC os ângulos B e C são suplementares (a soma é 90°). No triângulo CAE, temos os ângulos C e A suplementares. Já no triângulo EBA, temos os ângulos B e A suplementares, com isso verificamos:

1) $B + C = 90°$

2) $C + A = 90°$

3) $B + A = 90°$

De 1 e 2, temos que $B = A$ $(relação\ entre\ os$ triângulos $ABC\ e\ CEA)$

De 1 e 3, temos que $C = A$ $(relação\ entre\ os$ triângulos $ABC\ e\ EBA)$

Logo os ângulos A (triângulo CEA) e B (triângulo EBA) são congruentes e os ângulos C (triângulo CEA) e A (triângulo EBA) são congruentes.

A partir dessa demonstração, utilizaremos o conceito de proporcionalidade dos lados para encontraremos relações métricas do triângulo retângulo:

i. $\Delta ABC \sim \Delta EBA \; temos \; que \; \frac{c}{a} = \frac{n}{c} \rightarrow c^2 = a \cdot n$

ii. $\Delta ABC \sim \Delta CEA \; temos \; que \; \frac{b}{a} = \frac{m}{b} \rightarrow b^2 = a \cdot m$

iii. $\Delta EBA \sim \Delta CEA \; temos \; que \; \frac{h}{n} = \frac{m}{h} \rightarrow h^2 = m \cdot n$

Informaremos que a partir dessas três relações podemos tirar outras e perguntaremos qual relação obteremos somando membro a membro de *i* e *ii*.

Deixaremos cerca de cinco minutos para os alunos resolverem e em seguida, no quadro, faremos a resolução.

Resolução proposta:

$$c^2 = a \cdot n$$

$$b^2 = a \cdot m$$

$$c^2 + b^2 = a \cdot n + a \cdot m$$

$$c^2 + b^2 = a\,(m + n)$$

Como $m + n = a$ temos $c^2 + b^2 = a \cdot a \; ou \; c^2 + b^2 = a^2$

Encontraremos, assim, a relação conhecida como Teorema de Pitágoras. Comentaremos que existem outras formas de provar o Teorema de Pitágoras e deixaremos como sugestão que os alunos pesquisem essas outras formas em casa, caso tenham curiosidade. Neste momento, enfatizaremos que o Teorema de Pitágoras é válido apenas para triângulos retângulos, ou seja, que tenham um ângulo reto.

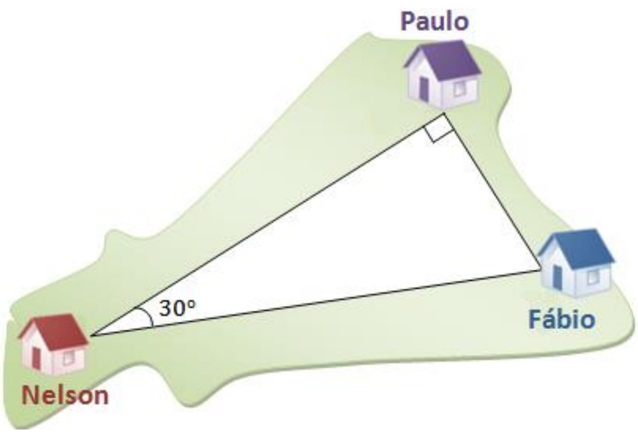
35 minutos

Em seguida, questionaremos os alunos oralmente sobre os conceitos vistos na aula até o momento, relembrando algumas propriedades e faremos o intervalo de 20 minutos.

Ao retornar do intervalo, apresentaremos as razões trigonométricas a partir do Problema 2 da lista do Encontro.

Problema 2. A figura mostra a disposição das casas de três amigos: Paulo, Nelson e Fábio.

Figura 14 - Problema envolvendo razões trigonométricas.



Fonte: Clube Obmep. Acesso em 01 nov. 2022

Calcule, em metros, o comprimento de fio telefônico necessário para ligar a casa da chácara de Fábio à casa da chácara de Nelson, sabendo-se que foram gastos 800 m de fio para ligar a casa de Paulo à casa de Fábio.

Resolução proposta:

Identificando que a distância a ser encontrada é a hipotenusa em relação ao triângulo desenhado representando a situação, das relações trigonométricas temos que:

$$\sin 30° = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{800}{h}$$

Multiplicando cruzado temos:

$$h = 2 \cdot 800$$

$$h = 1.600\ m$$

Portanto, o comprimento do fio telefônico a ser usado para ligar as duas casas será de 1.600 m.

Durante a resolução, apresentaremos aos alunos as relações seno, cosseno e tangente, usando o triângulo que nos é dado no Problema.

> “O **seno** do ângulo x é o nome dado a uma **razão** entre a medida do cateto oposto a x e a hipotenusa de um **triângulo retângulo**.”
>
> $$sen\ x = \frac{cateto\ oposto\ a\ x}{hipotenusa}$$

> “O cosseno do ângulo x é a razão entre a medida do cateto adjacente a x e a hipotenusa do triângulo retângulo.”
>
> $$cos\ x = \frac{cateto\ adjacente\ a\ x}{hipotenusa}$$

> “A **tangente** de um ângulo é a única razão que não envolve a medida da **hipotenusa**. Ela é dada pela razão entre a medida do **cateto oposto** e a medida do **cateto adjacente** ao ângulo x.”
>
> $$tg\ x = \frac{cateto\ oposto\ a\ x}{cateto\ adjacente\ a\ x}$$

Durante a explanação desses conceitos, relembraremos que a hipotenusa de um triângulo retângulo é sempre o lado oposto ao ângulo reto. O cateto oposto é sempre o lado oposto ao ângulo de referência e o cateto adjacente é o lado adjacente ao ângulo de referência.

30 minutos

Apresentados os conceitos e resolvida a questão, trabalharemos os conceitos aprendidos até o momento utilizando um jogo, o **‘Trilha de Pitágoras’**.

Trilha de Pitágoras – Resumo do jogo.

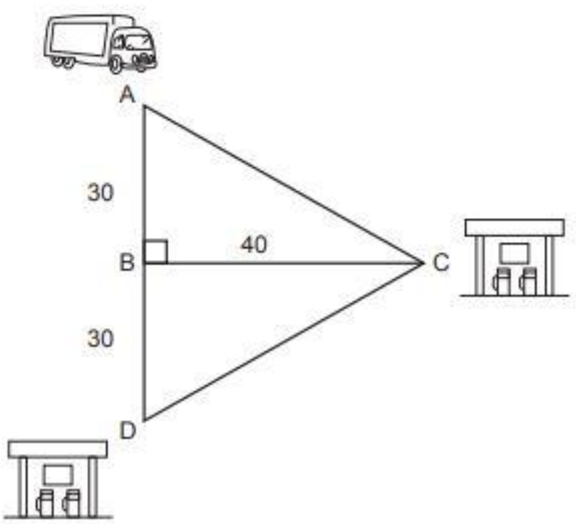
- Cada grupo irá receber um dado e 4 marcados para a trilha.
- Cada aluno terá direito a jogar o dado uma vez em cada rodada
- O número do dado será a quantidade de casas que seu marcador irá andar.
- Será entregue ao grupo uma folha contendo a trilha de Pitágoras

- Cada grupo irá receber um baralho de cartas contendo perguntas sobre o teorema de Pitágoras.
- A cada casa que o marcador andar terá uma pergunta que ele deverá responder.
- A pergunta estará em uma carta que será retirada por outro participante que irá realizar a pergunta.
- A cada pergunta respondida corretamente o aluno poderá permanecer na casa, caso ele erre a pergunta ele retorna a sua casa de origem.
- Ganha o jogo o aluno que responder mais perguntas corretamente e chegar à linha de chegada com seu marcador.

50 minutos

Após o jogo, faremos a leitura e pediremos que os alunos resolvam a questão 3 da lista. Deixaremos dez minutos para que os alunos resolvam e, em seguida, pediremos que um voluntário faça a resolução no quadro, explicando seu raciocínio para a turma.

Problema 3. (ENCCEJA 2018) Um caminhoneiro viajando pelo interior de seu país chega à cidade A. No tanque de combustível do seu veículo restam somente 10 litros. Seu destino final é a cidade D e as distâncias entre cada uma das cidades A, B, C e D são as indicadas na figura. Somente existem postos de abastecimento nas cidades C e D. O veículo consegue percorrer 5 quilômetros (km) com um litro de combustível.



a) ABD e 60km b) ACD e 100km c) ABCD e 120km d) ACBD e 140km

Resolução proposta:

O enunciado nos diz que um caminhoneiro, viajando pelo interior de seu país, chega à cidade A. Além disso, nos é informado que no tanque de combustível do seu veículo restam somente 10 litros.

Outros pontos importantes do enunciado:

- Somente existem postos de abastecimento nas cidades C e D;

- O veículo consegue percorrer 5 quilômetros por litro;

Dito isso, sabemos que o percurso ABD é impossível, pois não há um posto no caminho e o caminhão não conseguirá percorrer os 60 km (chega, no máximo, a 50 km com 10 litros).

O caminho mais curto possível é o ACD, porque ele passará por um posto e, depois, seguirá viagem até a cidade D.

Para descobrir a distância, basta nos lembrarmos da regra do triângulo pitagórico, que é formado pelos lados 3, 4 e 5 e seus múltiplos: *30, 40 e 50*

Por fim, somamos 50 + 50 e chegamos a 100 km como resposta.

20 minutos

Por fim, faremos o fechamento do Encontro relembrando alguns conceitos com os alunos, questionando-os acerca de possíveis dúvidas que tenham ficado do conteúdo da aula.

Avaliação:

A avaliação será realizada de forma contínua no decorrer da aula, na qual será avaliada a desenvoltura dos alunos ao responder os questionamentos realizados pelos estagiários, bem como a participação durante as resoluções dos problemas propostos.

Referências Bibliográficas:

BIANCHINI, E.; MIANI, M., **Construindo conhecimento em MATEMÁTICA** – 8ª série. São Paulo: Moderna, 2000.

IEZZI, Gelson et al. **MATEMATICA: ciência e aplicações**. 7. ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

IMENES, L. M.; LELLIS, M. **Matemática para todos** – 8ª série. São Paulo: Editora scipione, 2002.

LEDUR, B. S.; ENRICONI, M. H. S.; SEIBERT, T. E. A, **Trigonometria por meio da construção de conceitos**. São Leopoldo: Unisinos, 2001.

SANTOS, Thamires. **SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS**. Disponível em: https://www.educamaisbrasil.com.br/enem/matematica/semelhanca-de-triangulos. Acesso em: 01 nov. 2022.

SILVA, Luiz Paulo Moreira. **Exercícios sobre triângulo**. Disponível em: https://exercicios.brasilescola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-triangulo.htm#questao-1. Acesso em: 01 nov. 2022

SILVA, Luiz Paulo Moreira. **Seno, cosseno e tangente**. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/seno-cosseno-tangente.htm. Acesso em: 01 nov. 2022.

9.2. RELATÓRIO DO ENCONTRO V.

Número de alunos: 14 alunos.

Conteúdos desenvolvido na aula: Geometria no triângulo.

No encontro V estiveram presentes 14 alunos, sendo que no decorrer da aula duas alunas tiveram que se ausentar após o intervalo. Ambas assinaram a lista com o horário que se ausentaram, sendo essa, a única intercorrência do Encontro.

Iniciamos a aula recebendo os alunos e os alocando em grupos, com a aula iniciada, resolvemos juntos com eles a atividade proposta na aula anterior, o Problema 2 (Anexo VIII). Tal problema envolvia interpretação e o uso dos conceitos de função que havíamos abordado na aula anterior, porém notamos que os alunos apresentaram dificuldade na interpretação e resolução do problema, contudo após resolvermos no quadro, nenhum aluno acusou ter ficado com dúvidas.

Iniciamos a abordagem do conteúdo do Encontro V com a apresentação de conceitos sobre a geometria do triângulo, tais conceitos foram trazidos no quadro e pensados em conjunto com os alunos com perguntas abertas sobre o tema, deixando-os pensar e apresentando de acordo com o que estavam relembrando. Pudemos observar que neste início de aula, os alunos estavam participativos e interessados.

Em seguida, entregamos a lista do Encontro 5 (Anexo X e Anexo XI). A partir do conteúdo recém apresentado, propomos aos alunos a resolução do Problema 1 (Anexo X), demos um tempo de cinco minutos para que eles pudessem resolver, a partir disso, notamos que os alunos quando estão engajados para resolver o que foi proposto, surgindo dúvidas e debates. Decorrido o tempo previsto, pedimos que um dos alunos resolvesse o problema no quadro e assim aconteceu. Com o problema resolvido, abordamos os conceitos de ângulos internos de triângulos e algumas propriedades do triângulo retângulo, então pedimos que os alunos resolvessem alguns exemplos (Plano de Encontro 5). Poucas dúvidas surgiram neste momento, e as que surgiram, foram retiradas individualmente enquanto os alunos resolviam. Logo após, entregamos o material manipulativo (Teorema de Pitágoras) para os familiarizar com o conceito. Todos os grupos conseguiram montar as figuras que o material propunha e, então fizemos o intervalo de 20 minutos.

Retornando do intervalo, iniciamos a atividade “A Trilha de Pitágoras”. A partir dela, observamos como a aula se tornou dinâmica, pois os alunos estavam engajados e concentrados. Com o passar dos encontros é perceptível que a dinâmica proposta por jogos e atividades em grupo tornam a aula agradável, inclusive com a sugestão de repetição da dinâmica por um dos alunos, tudo isso propiciou maior êxito para aprendizagem do conteúdo proposto.

Após a dinâmica, abordamos brevemente as relações seno, cosseno e tangente a partir do triângulo retângulo no círculo trigonométrico, neste momento a aula se tornou expositiva. Após a demonstração das relações, pedimos que os alunos resolvessem o Problema 2 (Anexo X). Deixamos aos alunos um tempo de cinco minutos para a resolução e na sequência resolvemos no quadro com toda a turma. Finalizamos o Encontro fazendo o fechamento do conteúdo e então dispensamos os alunos.

10. ENCONTRO VI.

10.1. PLANO DE AULA – ENCONTRO VI – 12/11/2022.

Público-alvo: Alunos do 3º ano do Ensino Médio da rede pública estadual do Paraná.

Estagiários: Adrian Zanardi, Alexsandro André Alves de Freitas, Márcio Rocha e Meirielly Fernandes de Lima.

Conteúdos: Geometria plana e espacial.

Objetivo geral: Compreender propriedades geométricas de figuras planas e espaciais.

Objetivos específicos:

- Visualizar diferentes figuras geométricas umas sobre as outras.
- Resolver situações-problema que envolvam figuras geométricas, utilizando procedimentos apresentados em aulas anteriores.
- Calcular o volume de sólidos bem como suas áreas laterais e totais.
- Identificar os elementos geométricos de pirâmides, poliedros, prismas, cilindros, cones e esferas.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 4 horas.

Recursos didáticos:

Quadro, giz, atividades impressas, lápis, borracha, caderno, sólidos geométricos.

Encaminhamento metodológico:

Iniciaremos recebendo os alunos. A sala de aula estará organizada de forma que os alunos trabalhem em grupos de quatro integrantes durante o encontro. Faremos a chamada e usaremos cerca de 20 minutos para relembrar relações no círculo trigonométrico, complementando o que foi visto no encontro anterior. Mostraremos que o seno é a projeção da medida do ângulo no eixo y e o cosseno é a projeção da medida do ângulo no eixo x e comentaremos sobre os ângulos notáveis, utilizando um círculo trigonométrico móvel. Após isso, entregaremos a lista do Encontro 6 (Anexo XII e Anexo XIII)

25 minutos

Em seguida, começaremos a estudar geometria plana, definindo-a, a partir de questionamentos aos alunos sobre o que eles lembram sobre o assunto:

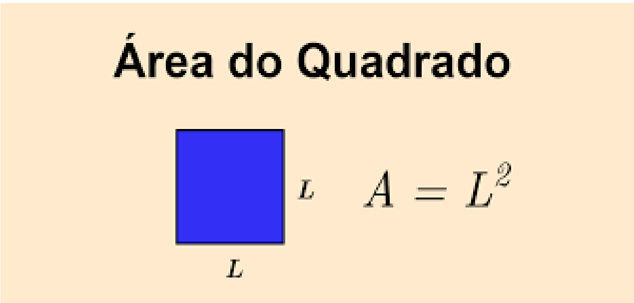
> "A geometria plana é a área da matemática que estuda as figuras planas, iniciando-se nos conceitos primitivos de ponto, reta e plano, e, com base neles, desenvolvendo-se até a construção das figuras planas, com o cálculo de suas respectivas áreas e perímetros."

Relembraremos, no quadro, que para calcular o perímetro de qualquer polígono, basta somarmos as medidas de todos os lados desse polígono. Já no caso da área, que é a medida da superfície da figura plana, temos fórmulas específicas para realizar as medições.

Perguntaremos quais fórmulas eles se lembram e, em seguida, apresentaremos as principais fórmulas para encontrar as áreas das figuras planas.

Quadrado:

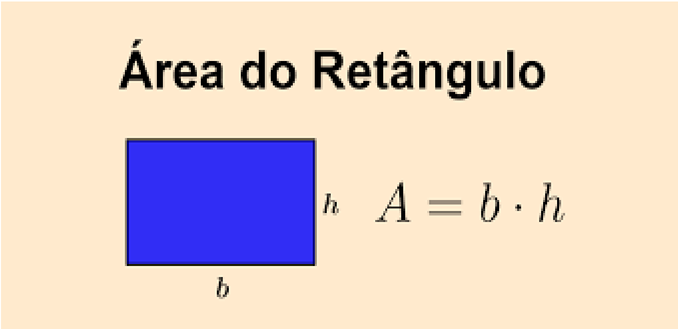
Figura 15 - Área do quadrado



Fonte: Escola Educação – Acesso em 08 nov. 2022

Retângulo:

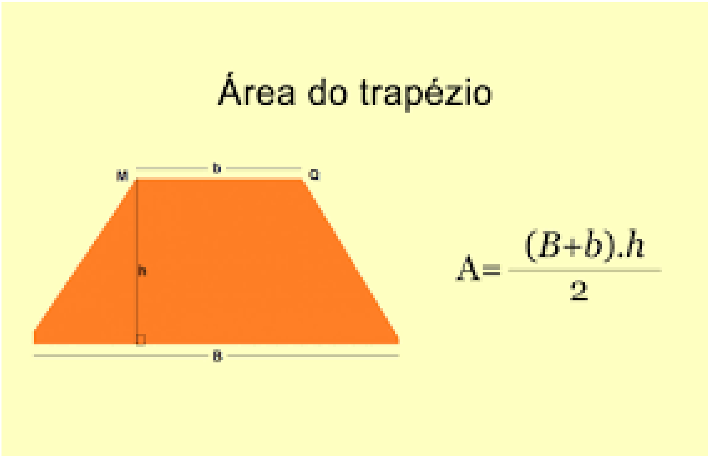
Figura 16 - Área do retângulo.



Fonte: Escola Educação – Acesso em 08 nov. 2022

Trapézio:

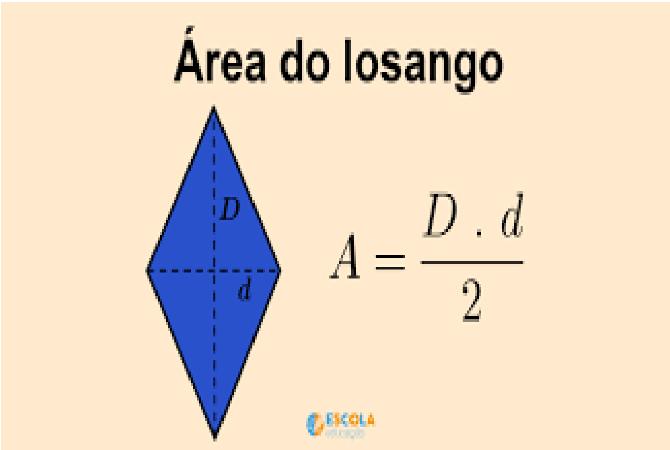
Figura 17 - Área do trapézio



Fonte: Ler e Aprender – Acesso em 08 nov. 2022

Losango:

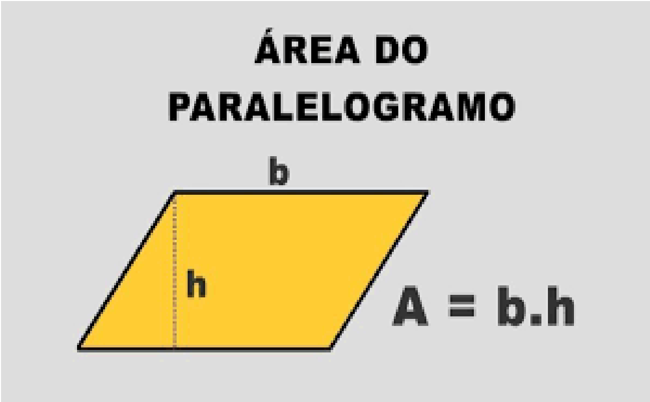
Figura 18 - Área do losango.



Fonte: Escola Educação – Acesso em 08 nov. 2022

Paralelogramo:

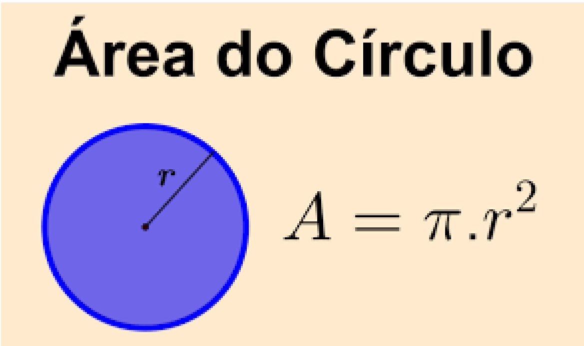
Figura 19 - Área do paralelogramo.



Fonte: Estudos Kids – Acesso em 08 nov. 2022

Círculo:

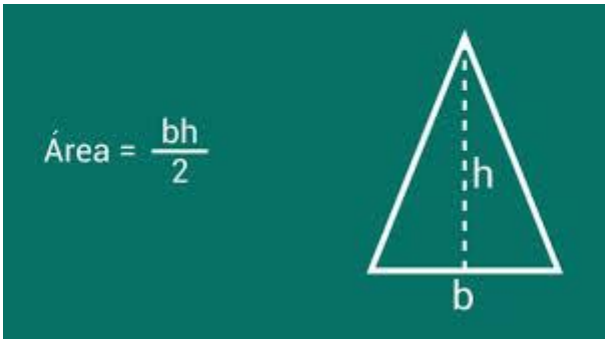
Figura 20 - Área do círculo.



Fonte: Matemática.pt – Acesso em 08 nov. 2022

Triângulo:

Figura 21 - Área do triângulo.

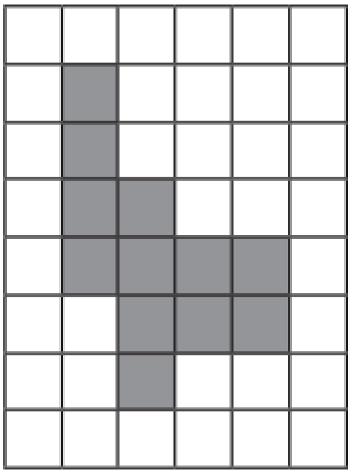


Fonte: Escola Brasil – Acesso em 08 nov. 2022

20 minutos

Para ajudar a definir essas áreas, usaremos um problema e, a partir das dúvidas que surgirem dele, apresentaremos as definições e fórmulas das principais figuras planas, como dado acima.

Problema 1. (Enem – PP - Adaptada) Na zona rural, a utilização de unidades de medida como o hectare é bastante comum. O hectare equivale à área de um quadrado de lado igual a 100 metros. Na figura, há a representação de um terreno por meio da área em destaque. Nesta figura, cada quadrado que compõe esta malha representa uma área de 1 hectare.



O terreno em destaque foi comercializado pelo valor R$ 3.600.000. O valor do metro quadrado desse terreno foi de?

Resolução proposta:

Primeiro calcularemos a área do quadrado:

$$A = l^2$$

$$A = 100^2 = 10.000$$

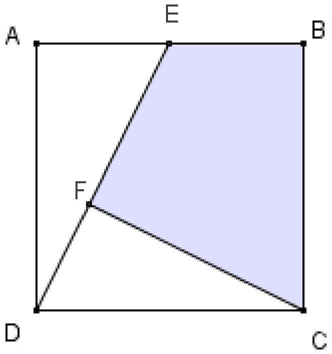
Há 12 quadrados na área, então $12 \cdot 10.000 = 120.000\, m^2$. Para saber o custo de cada quadrado, basta dividir o valor pago pelo terreno pela sua área:

$$\frac{3600000}{120000} = 30\, reais$$

35 minutos

Terminada a resolução do Problema, iremos propor outro, o Problema 1 da lista do Encontro (Anexo XII), desta vez daremos o tempo de dez minutos para que os alunos resolvam o Problema com as definições e fórmulas já apresentadas e após este tempo, faremos a resolução em conjunto com a turma, no quadro.

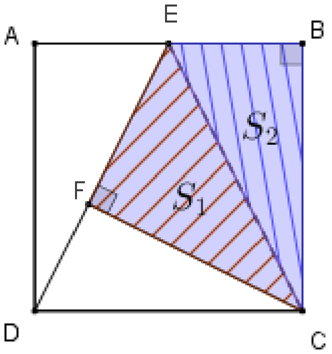
Problema 2. Na figura abaixo, temos um quadrado ABCD de lado 2 cm; E é o ponto médio do segmento AB e F é um ponto entre E e D.



Se os segmentos CF e DE são perpendiculares, determine a área do quadrilátero BCFE.

Resolução proposta:

A área BCFE pode ser dividida em dois triângulos retângulos, FEC e EBC. Precisamos encontrar a área S_1 e S_2 desses dois triângulos.



Utilizando o Teorema de Pitágoras, podemos obter os comprimentos dos segmentos EC e ED:

$$x^2 = 2^2 + 1^2$$

$$x^2 = 4 + 1$$

$$x = \sqrt{5}$$

Então, as medidas dos segmentos EC e ED são de $\sqrt{5}$ cm cada.

Para EBC, sabemos que BC mede 2 cm e EB mede 1 cm pois E é ponto médio de AB e, portanto, divide o segmento exatamente ao meio. A área pode ser calculada através da fórmula:

$$S_2 = \frac{base \cdot altura}{2}$$

$$S_2 = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{EB}}{2}$$

$$S_2 = \frac{2 \cdot 1}{2}$$

$$S_2 = 1$$

Logo, a área de S_2 é de 1 cm^2.

Para S_1, é necessário encontrar os valores dos segmentos EF e FC. Para isso, observamos o triângulo DEC. Sua área mede 2 cm^2 pois sua base DC mede 2 cm e sua altura é dada por uma perpendicular ao lado DC passando por E.

Porém, a área desse triângulo também pode ser calculada através da base ED e a altura FC

$$2 = \frac{base \cdot altura}{2}$$

$$2 = \frac{\overline{ED} \cdot \overline{FC}}{2}$$

$$2 = \frac{\sqrt{5} \cdot \overline{FC}}{2}$$

$$2 \cdot 2 = \sqrt{5} \cdot \overline{FC}$$

$$\overline{FC} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

Para descobrir agora a medida de EF, observamos que o triângulo EFC é retângulo. Aplicando o Teorema de Pitágoras:

$$\overline{EC}^2 = \overline{EF}^2 + \overline{FC}^2$$

$$\sqrt{5}^2 = \overline{EF}^2 + \frac{4}{\sqrt{5}}^2$$

$$5 = \overline{EF}^2 + \frac{16}{5}$$

$$\overline{EF}^2 = 5 - \frac{16}{5}$$

$$\overline{EF}^2 = \frac{25}{5} - \frac{16}{5}$$

$$\overline{EF}^2 = \frac{9}{5}$$

$$\overline{EF} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

Assim, podemos calcular a área S_1:

$$S_1 = \frac{base \cdot altura}{2}$$

$$S_1 = \frac{\overline{FC} \cdot \overline{EF}}{2}$$

$$S_1 = \frac{\frac{4}{\sqrt{5}} \cdot \frac{3}{\sqrt{5}}}{2}$$

$$S_1 = \frac{\frac{12}{5}}{2}$$

$$S_1 = \frac{12}{5} \cdot \frac{1}{2}$$

$$S_1 = \frac{12}{10} = 1{,}2\ cm^2$$

Logo, a área de S de BCFE é dada pela soma de S_1 e S_2:

$$S = S_1 + S_2$$

$$S = 1{,}2 + 1$$

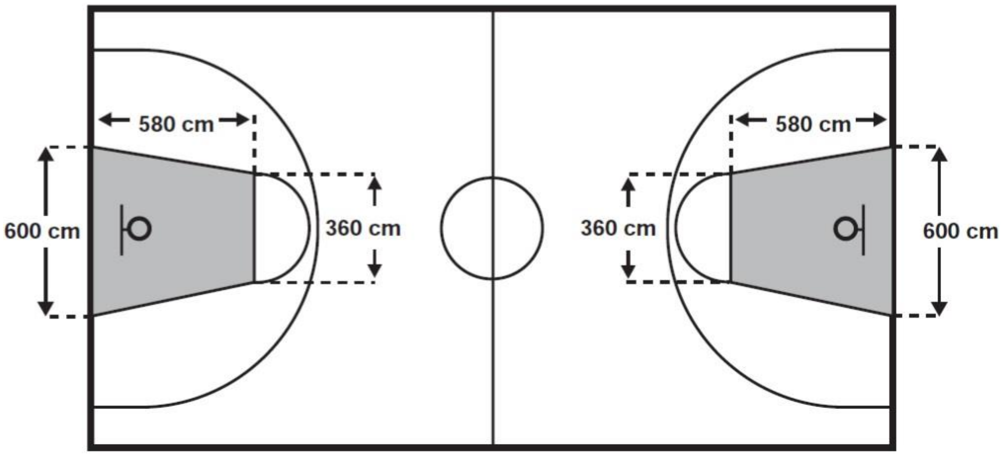
$$S = 2{,}2\ cm^2$$

Portanto a área de BCFE é de 2,2 cm^2.

Em seguida, pediremos que os alunos resolvam um Problema do ENEM, a questão 1 da lista do Encontro (Anexo XIII), novamente serão dados dez minutos para que os alunos resolvam e subsequentemente será feita a resolução no quadro.

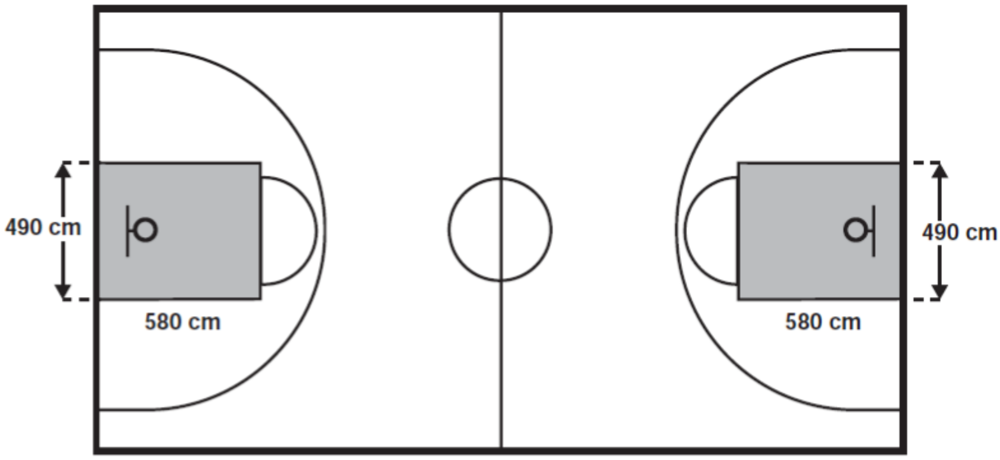
20 minutos

Problema 3. (Enem 2015 – Adaptada) O Esquema I mostra a configuração de uma quadra de basquete. Os trapézios em cinza, chamados de garrafões, correspondem a áreas restritivas.



Esquema I: área restritiva antes de 2010

Visando a atender as orientações do Comitê Central da Federação Internacional de Basquete (Fiba) em 2010, que unificaram as marcações das diversas ligas, foi prevista uma modificação nos garrafões das quadras, que passariam a ser retângulos, como mostra o Esquema II.



Esquema II: área restritiva a partir de 2010

Após executadas as modificações previstas, houve uma alteração na área ocupada por cada garrafão, que corresponde a um aumento ou diminuição? Qual o valor em cm^2 do aumento ou diminuição?

Resolução proposta:

No Esquema I, o garrafão é um trapézio, com bases medindo $600\ cm$ e $380\ cm$ e altura medindo $580\ cm$. A área do trapézio é calculada por:

$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

$$A = \frac{(600 + 360) \cdot 580}{2}$$

$$A = \frac{960 \cdot 580}{2}$$

$$A = \frac{556.800}{2}$$

$$A = 278.400\ cm^2$$

No Esquema II, o garrafão é um retângulo de base de $580\ cm$ e altura $490\ cm$.

$$A = b \cdot h$$

$$A = 580 \cdot 490$$

$$A = 284.200\ cm^2$$

Como a área do esquema II é maior que área do esquema I, então tivemos um aumento na área correspondente ao garrafão.

Para calcular o aumento, basta subtrair o garrafão do esquema II pelo garrafão do esquema I:

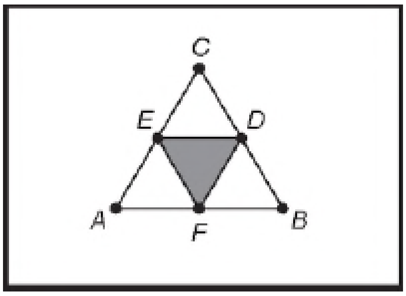
$$diferença = 284.200 - 278.400$$

$$diferença = 5.800\ cm^2$$

15 minutos

Feita a resolução, deixaremos como atividade para casa o Problema 3 (Anexo XIII), para correção no início do próximo encontro.

Problema 4. (Enem 2014 – Adaptada) Um artista deseja pintar em um quadro uma figura na forma de triângulo equilátero ABC de lado 1 metro. Com o objetivo de dar um efeito diferente em sua obra, o artista traça segmentos que unem os pontos médios D, E e F dos lados BC, AC e AB, respectivamente, colorindo um dos quatro triângulos menores, como mostra a figura.



Qual é a medida da área pintada, em metros quadrados, do triângulo DEF?

Resolução proposta:

Analisando a imagem, é possível ver que ela é ¼ da área do triângulo, então, calcularemos a área do triângulo equilátero dividido por 4.

$$A = \frac{\sqrt{3} \cdot a^2}{4}$$

$$A = \frac{\sqrt{3} \cdot 1^2}{4}$$

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Como área do triângulo pintado é ¼, logo:

$$\acute{A}rea\ pintada = (\frac{\sqrt{3}}{4}) \cdot \frac{1}{4}$$

$$\acute{A}rea\ pintada = \frac{\sqrt{3}}{16} cm^2$$

55 minutos

Durante todas as resoluções, serão relembrados os conceitos e definições apresentados no Problema 1 do Encontro, de acordo com as dúvidas trazidas pelos alunos.

Logo depois, faremos 20 minutos de intervalo.

Retornando do intervalo, exploraremos o conteúdo de geometria espacial.

Traremos em sala quatro formas geométricas sólidas, solicitaremos que os alunos fiquem de pé e formem um semicírculo e, posteriormente, pediremos para que quatro alunos preencham os sólidos indicados com água, então faremos perguntas relacionadas ao volume de água em cada sólido e como estão relacionados.

25 minutos

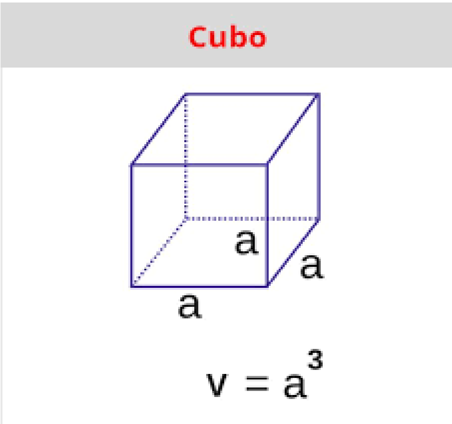
A partir dessa prática, definiremos o que é volume:

> "Podemos definir volume como o espaço ocupado por um corpo ou a capacidade que ele tem de comportar alguma substância."

A seguir, leremos a Situação Problema 3 (Anexo XII), a partir da qual trabalharemos os conceitos de geometria espacial. Durante a resolução da Situação Problema, apresentaremos algumas fórmulas para cálculo de volume de sólidos.

Cubo:

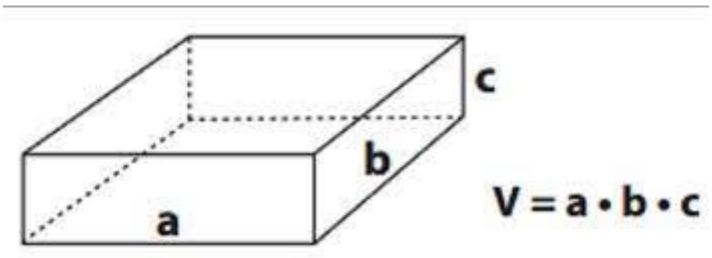
Figura 22 - Volume do cubo.



Fonte: Escola Educação – Acesso em 09 nov. 2022

Paralelepípedo:

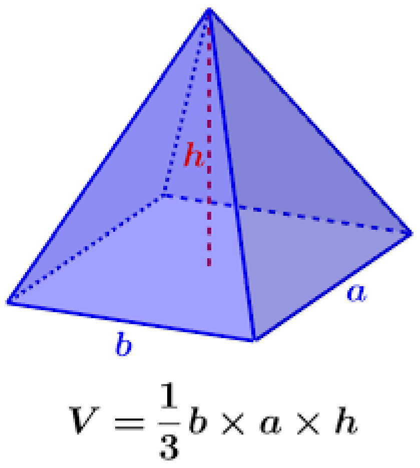
Figura 23 - Volume do paralelepípedo.



Fonte: Passei Direto – Acesso em 09 nov. 2022

Pirâmide:

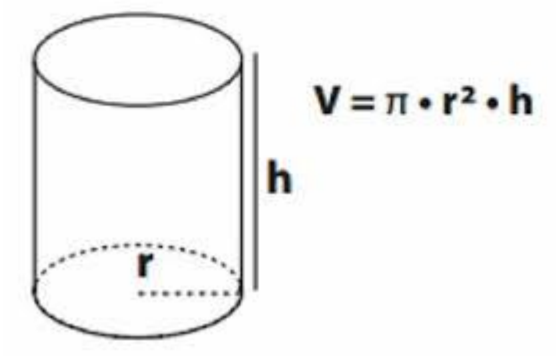
Figura 24 - Volume da pirâmide.



Fonte: Neuro Chispas – Acesso em 09 nov. 2022

Cilindro:

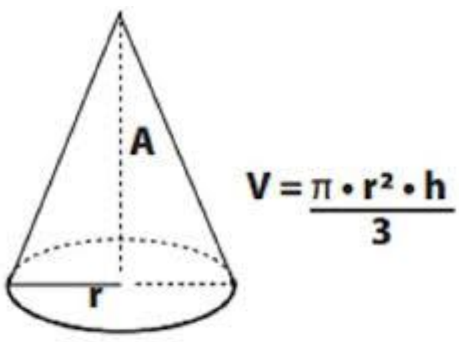
Figura 25 - Volume do cilindro.



Fonte: Cálculo Certo – Acesso em 09 nov. 2022

Cone:

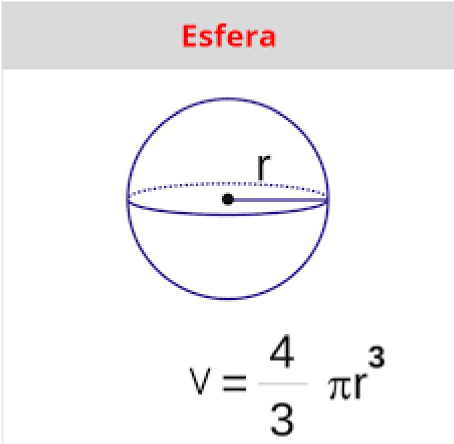
Figura 26 - Volume do cone.



Fonte: Cálculo Certo – Acesso em 09 nov. 2022

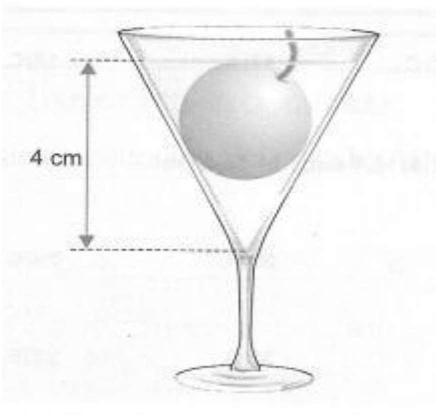
Esfera:

Figura 27 - Volume da esfera.



Fonte: Escola Educação – Acesso em 09 nov. 2022

Problema 5. Um cálice com a forma de um cone mantém V cm³ de uma bebida. Uma cereja de forma esférica, com diâmetro 2 cm, é colocada dentro do cálice, supondo que a cereja repousa apoiada nas laterais do cálice, e o líquido recobre exatamente a cereja a uma altura de 4 cm a partir do vértice do cone, determine o valor de V.



Resolução proposta: Para descobrir apenas V é necessário retirar a esfera (cereja) do líquido. Como ela está apoiada nas laterais do cálice e sabemos que o seu diâmetro é de 2 cm, podemos calcular o valor V utilizando a metade desse valor para o raio do cone, para descobrir V:

$$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$$

$$V = \frac{\pi \cdot 1^2 \cdot 4}{3}$$

$$V = \frac{4\pi}{3}$$

30 minutos

Feita a resolução e apresentados os conceitos, pediremos que agora os alunos resolvam outro problema, a partir do que foi exposto até o momento no Encontro. Serão dados 15 minutos para que os alunos resolvam o Problema 5 (Anexo XIII) e em seguida, faremos a resolução no quadro com toda a turma.

Problema 6. (ENEM 2021) Um povoado com 100 habitantes está passando por uma situação de seca prolongada e os responsáveis pela administração pública local decidem contratar a construção de um reservatório. Ele deverá ter a forma de um cilindro circular reto, cuja base tenha 5 metros de diâmetro interno, e atender à demanda de água da população por um período de exatamente sete dias consecutivos. No oitavo dia, o reservatório vazio é completamente reabastecido por carros-pipa. Considere que o consumo médio diário por habitante é de 120 litros de água. Use 3 como aproximação para π.

Nas condições apresentadas, o reservatório deverá ser construído com uma altura interna mínima, em metro, igual a

a) 1,12 b) 3,10 c) 4,35 d) 4,48 e) 5,60

Resolução proposta:

O volume de cilindro é calculado por $V = \pi r^2 . h$

Como o diâmetro do cilindro é igual a $d = 5m$, o raio será $r = 2{,}5m$ e $\pi = 3$, substituindo obtemos $V = 3.(2{,}5)^2 . h$

A capacidade desse cilindro para atender à demanda de água da população por 7 dias, sabendo que são 100 habitantes e o consume médio diário é igual a 120L, será

$$V = 100.120.7 = 84000L$$

Transformando litros em metros cúbicos $1L = 0{,}001m^3$

Então, $84000L = 84m^3$

Portanto, a altura será:

$$84 = 3.(2,5)^2.h$$

$$18,75h = 84$$

$$h = \frac{84}{18,75}$$

$$h = 4,48m$$

30 minutos

Por fim, faremos o fechamento do Encontro VI relembrando alguns conceitos com os alunos, questionando-os acerca das possíveis dúvidas que tenham ficado do conteúdo trabalhado na aula.

10 minutos

Avaliação:

Realizaremos de forma contínua no decorrer da aula, na qual avaliaremos a desenvoltura dos alunos ao responder os questionamentos feitos pelos estagiários, bem como a participação durante as resoluções dos problemas propostos.

Referências Bibliográficas:

ALESSANDRO, Orestes. **40 questões de geometria espacial com resoluções**. Disponível em: https://pensevestibular.com.br/topicosdematematica/geometria-espacial/40-questoes-de-geometria-espacial-com-resolucoes. Acesso em: 07 nov. 2022.

CAIUSCA, Alana. **GEOMETRIA ESPACIAL NO ENEM**. Disponível em: https://www.educamaisbrasil.com.br/enem/matematica/geometria-espacial. Acesso em: 08 nov. 2022.

GOUVEIA, Rosimar. **Geometria Espacial**. Disponível em: https://www.todamateria.com.br/geometria-espacial/. Acesso em: 08 nov. 2022.

OLIVEIRA, Raul Rodrigues de. "Área de figuras planas"; Brasil Escola. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/area-de-figuras-planas.htm. Acesso em 08 de novembro de 2022.

OLIVEIRA, Raul Rodrigues de. **Geometria espacial**. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/geometria-espacial.htm. Acesso em: 08 nov. 2022.

10.2. RELATÓRIO DO ENCONTRO VI.

Número de alunos: 6 alunos.

Conteúdos desenvolvidos na aula: Geometria plana e Geometria espacial.

No encontro VI estiveram presentes 6 alunos, sem intercorrência durante a aula.

Iniciamos a aula recebendo os alunos e os alocando em semicírculo. Com a aula iniciada, trouxemos um material impresso para explicarmos os conceitos de seno, cosseno e tangente. Usamos um círculo trigonométrico pendurado no quadro para mostrar as projeções do triangulo retângulo nos eixos seno e cosseno. Tais conceitos e interpretações foram trabalhados juntamente com os alunos, fazendo perguntas abertas. Neste momento, dois alunos se disponibilizaram a ir até o quadro e preencher uma tabela com os ângulos notáveis.

Iniciamos a abordagem do conteúdo do Encontro VI com uma situação problema e a partir dela falamos sobre geometria plana, foram trazidos no quadro conceitos elaborados em conjunto com os alunos com perguntas abertas sobre o tema, deixando-os pensar e apresentando de acordo com o que estavam relembrando. Pudemos observar que neste início de aula, os alunos estavam participativos e interessados.

Em seguida, entregamos a lista do Encontro 6 (Anexo XII). A partir do havia sido discutido no primeiro Problema, propomos aos alunos a resolução do Problema 2 (Anexo XII), demos um tempo de cinco minutos para que eles pudessem resolver, e nesse momento, pudemos observar grande dificuldade de entendimento e abstração dos alunos para a resolução, observamos então a não coerência do conteúdo abordado no primeiro Problema e a dificuldade que este segundo apresentava, o que gerou muitas dúvidas nos alunos. Decorrido o tempo previsto, resolvemos o problema no quadro e os alunos confirmaram que entenderam o Problema após a explicação.

Após o Problema 2, apresentamos aos alunos alguns conceitos de geometria plana que não havíamos abordado anteriormente, como algumas áreas de figuras como trapézio, paralelogramo etc., então com os conceitos apresentados solicitamos para que eles resolvessem o Problema 1 (Enem 2015 – Adaptada**)** (Anexo XIII), demos o tempo de cinco minutos para que os alunos pudessem resolver e então com as dúvidas que foram surgindo nós fomos auxiliando os mesmos para a resolução. Após o tempo proposto resolvemos a questão no quadro e os alunos foram dispensados para o intervalo.

Retornando do intervalo começamos com o conteúdo de geometria espacial a partir dos volumes sólidos. Propomos então uma atividade prática com os alunos, pedimos para que todos ficassem em pé e viessem até frente do quadro e então apresentamos quatro sólidos (primas de bases quadrada e pentagonal e pirâmides de bases quadrada e pentagonal), que usamos para abordar o conceito de volume. A seguir, entregamos uma garrafa de água para que os alunos, neste momento em um único grupo, preenchessem os sólidos, a fim de demonstrar a propriedade de volume em que uma pirâmide de mesma base e mesma altura corresponde a $\frac{1}{3}$ do volume de um prisma de mesma base e mesma altura. Com essa prática, notamos que a aula se tornou mais dinâmica e todos os alunos participaram, também observamos que quando manipulamos o material ficou mais claro o entendimento da relação entre pirâmides e prisma de mesma base e mesma altura.

Terminada a atividade abordamos alguns conceitos sobre volume no quadro, extrapolando a relação demonstrada para outros casos, como cilindro e cone. Em seguida, propomos aos alunos a resolução do Problema 3 (Anexo XII), com o problema proposto demos aos alunos o tempo de cinco minutos para a resolução, no decorrer desse tempo os alunos apresentaram muitas dúvidas na resolução, que nos fez observar um problema no enunciado da questão, que era a falta de uma informação acerca da posição da cereja citada. Então, falamos individualmente com os alunos sobre a duas possíveis interpretações desse Problema. No fim da aula, fizemos um fechamento da matéria trabalhada no Encontro e promovemos uma breve conversa sobre o ENEM, como havíamos proposto no Encontro 5.

11. ENCONTRO VII.

11.1. PLANO DE AULA – ENCONTRO VII – 19/11/2022.

Público-Alvo: Alunos do 3° ano do Ensino Médio da rede pública estadual do Paraná.

Estagiários: Adrian Zanardi, Alexsandro André Alves de Freitas, Márcio Rocha e Meirielly Fernandes de Lima.

Conteúdo: Matemática Financeira.

Objetivo Geral: Aprender conceitos relacionados a finanças no Brasil e no mundo.

Objetivos Específicos:

- Compreender a importância de investir;
- Relacionar-se de forma mais saudável com o dinheiro;
- Relacionar a matemática com questões financeiras presentes no dia-a-dia;
- Trabalhar com porcentagem em questões cotidianas;
- Calcular juros simples e compostos;
- Relembrar conceitos de função exponencial e logarítmica.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 4 horas.

Recursos Didáticos:

Materiais impressos, quadro, giz, caderno, caneta, lápis, borracha, aparelho com conexão à internet.

Encaminhamento metodológico:

Iniciaremos recebendo os alunos. A sala de aula estará organizada de forma que os alunos trabalhem em semicírculo. Faremos a chamada e usaremos cerca de 30 minutos para tirarmos dúvidas e resolvermos questões da lista do Encontro 6 (Anexo VIII e Anexo IX). Tiradas as dúvidas, entregaremos a lista do Encontro 7 (Anexo XIV e Anexo XV).

35 minutos

Terminadas as correções, questionaremos os alunos sobre o que eles fazem com o dinheiro que possuem?

Aguardaremos as respostas e passaremos uma atividade na qual os alunos terão que dividir seus gastos mensais em alguns grupos:

- Contas essenciais (aluguel, conta de água, luz ou internet);
- Alimentação
- Contas fixas (parcela de celular, computador, cartão de crédito)
- Lazer
- Transporte (passagem de ônibus, combustível, Uber)
- Dinheiro guardado ou investido

Pediremos que eles calculem os valores valor total gasto no mês e depois dividam cada grupo de gastos em percentual. Exemplo: 20% em contas essenciais, 30% em alimentação, 10% em contas fixas, 25 % em lazer, 10% em transporte e 5% poupado ou investido.

Após todos terem feito, solicitaremos que os mesmos verifiquem se o valor dos gastos total representa o valor ganho mensalmente (mesada, trabalho CLT ou jovem aprendiz, bolsa de estágio, entre outras). Reforçaremos a importância de não gastar mais do que recebe e guardar um valor para emergências.

Apresentaremos, então, o método 70-30, ou seja, 70% de gasto do que ganha para o presente e 30% para o futuro.

- 70% da receita para os gastos fixos;

- 10% da receita para um plano de Independência Financeira;

- 20% dividir em metas;

- M1: o que vou consumir nos próximos dias, até 3 meses;

- M2: tudo que quiser entre três meses e seis meses;

- M3: o que deseja alcançar entre seis meses e um ano;

- M4: Objetivos a serem alcançados entre um ano e cinco anos.

- M5: Metas para mais de cinco anos.

Compreendido de separar uma parcela para emergência, independência financeira ou metas de curto, médio ou longo prazo, perguntaremos quais investimentos eles conhecem? Definiremos brevemente a diferença entre guardar ou poupar dinheiro para investimento.

Poupar significa economizar, envolvendo um hábito de gastar menos do que recebe.

Investir é aplicar o dinheiro economizado para render e se multiplicar, normalmente em produtos de longo prazo.

Posteriormente, apresentaremos a seguinte tabela, presente na lista do Encontro (Anexo XIV):

Figura 28 - Onde os brasileiros investem.

Investimentos preferidos pelos brasileiros (em %):	
Poupança	69.50%
Imóveis	28.80%
Previdência privada	8.90%
Fundos de investimento	5.90%
Dólar	5.50%
CDB (Certificado de depósito bancário)	1.80%
Tesouro direto	1.60%
LCI (Letras de crédito imobiliário)	0.80%
Bolsa de valores	0.40%

Fonte: SPC Brasil. Acesso em 14 nov. 2022

É esperado que os dados da tabela reflitam as escolhas feitas pelos alunos na discussão anterior. Usaremos esse gancho para comentar que existem outros investimentos além da poupança, que podem ser mais vantajosos como os títulos do governo.

Para complementar a argumentação, pediremos que os alunos peguem seus celulares e acessem o seguinte link (calculadora de investimento na qual podemos calcular o rendimento de investimentos da renda fixa), que disponibilizaremos via *whattsapp*:
https://www.idinheiro.com.br/calculadoras/calculadora-de-investimentos/

Em seguida, usando a calculadora do site, pediremos que os alunos construam uma tabela, comparando três pessoas com diferentes perfis, uma que guarda R$100,00 por mês, mas não investe, uma que investe a mesma quantia na poupança e uma que investe este dinheiro em um título com rendimento de 9% ao ano. Iremos sugerir que façam comparação dos personagens pelo período de dez anos.

Construção proposta:

	Pessoa A	Pessoa B	Pessoa C
Dinheiro investido	R$12.000	R$12.000	R$12.000
Valor ganho em juros	R$0	R$4.389,79	R$6.971,87
Total bruto	R$12.000	R$16.389,79	R$18.971,87

25 minutos

Terminada a atividade, apresentaremos, no quadro, as fórmulas de juros simples e de juros compostos, relacionando-as com a tabela construída.

Juros simples.

$$J = C.i.t$$

J = juros simples; C = capital inicial; i = taxa de juros; t = tempo da aplicação.

$$M = C + J$$

M = Montante

Juros compostos.

$$M = C(1+i)^t$$

M é o montante acumulado, o total da aplicação;

C é o capital investido;

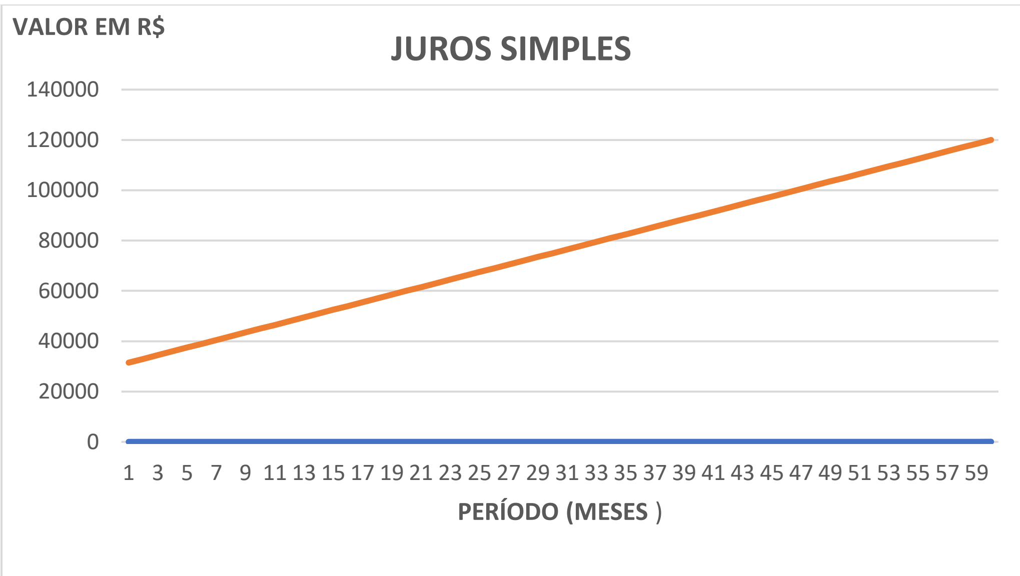
i é a taxa de juros;

t é o período de tempo.

Com as fórmulas apresentadas, reforçaremos a importância de investir, reiterando que quando investimos, temos os juros compostos trabalhando a nosso favor.

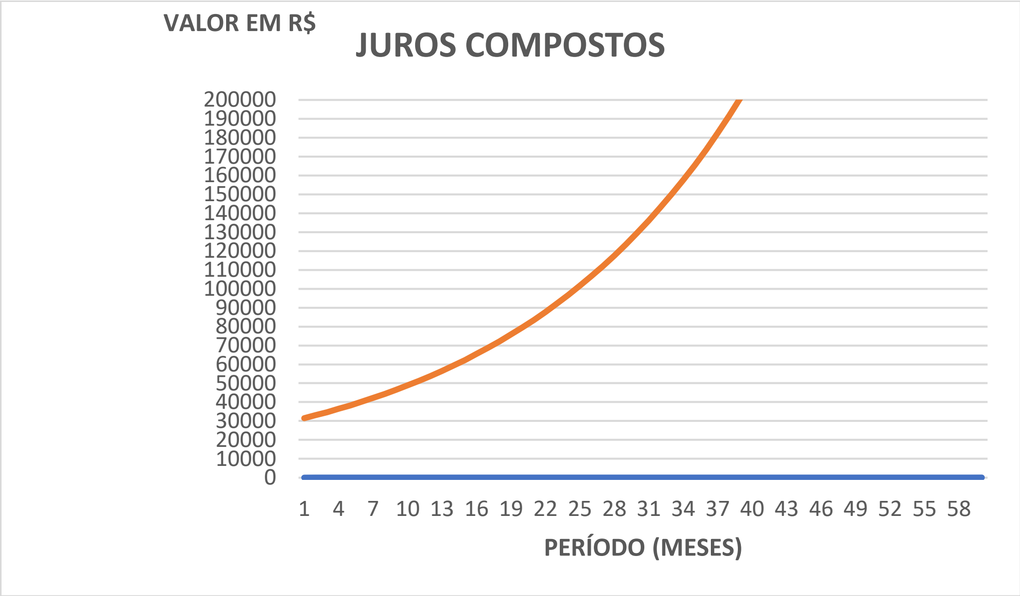
Apresentaremos, então, os gráficos dos juros simples e compostos, e logo após, perguntaremos qual função representa cada uma delas.

Figura 29 - Gráfico juros simples.



Fonte: Os autores. Criada em 16 nov. 2022

Figura 30 - Gráfico juros compostos.



Fonte: Os autores. Criada em 16 nov. 2022

Notamos no gráfico dos juros simples comporta-se como uma função afim, sendo o coeficiente linear (b) o capital inicial, o coeficiente angular (a) o produto entre o capital inicial e a taxa de juros, a variável independente (x) o período (meses/ano) e a variável dependente $[y\ ou\ f(x)]$ o montante.

No gráfico dos juros compostos, temos a variável independente (t) encontra-se no expoente, portanto temos uma função exponencial.

Em seguida, passaremos duas situações problema envolvendo juros simples e compostos.

Problema 1. Uma dívida de R$ R$ 1.000,00 foi paga com atraso de um ano e meio. No acerto, foi cobrada uma multa de R$ 100,00, mais juro de 1% ao mês em cima do valor inicial da dívida. Nessas condições, o valor pago por essa dívida foi de:

Resolução proposta:

Para resolvemos a questão precisamos somar:

$$Valor\ pago = dívida\ inicial + multa + juros\ no\ período$$

Sendo a multa:

$$multa = 1000 \cdot 10\%$$

$$multa = 1000 \cdot 0.1 = 100$$

Os juros:

$$J = C \cdot I \cdot T$$

$$J = 1000 \cdot 0.01 \cdot 18$$

$$J = 180$$

Somando:

$$valor\ pago = 1000 + 100 + 180$$

$$Valor\ pago = 1280\ reais$$

Problema 2. (Enem 2011 - Adaptada) um jovem investidor precisa escolher qual investimento lhe trará maior retorno financeiro em uma aplicação de R$ 500,00. Para isso, pesquisa o rendimento e o imposto a ser pago em dois investimentos: poupança e CDB (certificado de depósito bancário). As informações obtidas estão resumidas no quadro:

	Rendimento mensal (%)	IR (imposto de renda)
POUPANÇA	0,560	ISENTO
CDB	0,876	4% (sobre o ganho)

Para o jovem investidor, ao final de um mês, a aplicação mais vantajosa é:

Resolução proposta:

Para descobrir qual o melhor rendimento, vamos calcular quanto cada um renderá no final de um mês. Vamos então começar calculando o rendimento da poupança.

Considerando os dados do problema, temos:

$$c\ =\ R\$500{,}00$$

$$i\ =\ 0{,}560\%\ =\ 0{,}0056\ a.m.$$

$$t\ =\ 1\ mês$$

$$M\ = ?$$

Substituindo esses valores na fórmula de juros compostos, temos:

$$M\ =\ C\ (1 + i)^t$$

$$Mpoupança\ =\ 500\ (1 + 0{,}0056)^1$$

$$Mpoupança\ =\ 500 \cdot 1{,}0056$$

$$Mpoupança\ =\ R\$\ 502{,}80$$

Como neste tipo de aplicação não existe desconto do imposto de renda, então esse será o valor resgatado.

Agora, iremos calcular os valores para o CDB. Para esta aplicação, a taxa de juros é igual 0,876% (0,00876). Substituindo esses valores, temos:

$$MCDB = 500\,(1 + 0{,}00876)^1$$
$$MCDB = 500 \cdot 1{,}00876$$
$$MCDB = R\$\,504{,}38$$

Esse valor não será o valor recebido pelo investidor, pois nesta aplicação existe um desconto de 4%, relativo ao imposto de renda, que deverá ser aplicado sobre os juros recebidos, conforme indicado abaixo:

$$J = M - C$$
$$J = 504{,}38 - 500 = 4{,}38$$

Precisamos calcular 4% deste valor, para isso basta fazer:

$$IR = 4{,}38 \cdot 0{,}04 = 0{,}1752$$

Aplicando esse desconto ao valor, encontramos:

$$Valor\ recebido\ CDB = 504{,}38 - 0{,}1752 = R\$\,504{,}21$$

Logo o CDB é o mais vantajoso.

Explicaremos brevemente o que é um CDB.

A sigla CDB significa Certificado de Depósito Bancário e consiste em uma aplicação oferecida por bancos para captação de fundos e rende juros superiores à poupança. Normalmente essa aplicação está atrelada ao CDI (Certificado de Depósito Interbancário) e pode variar de banco para banco, mas mantendo relação com o CDI. Os CDB mais comuns rendem 100% do CDI.

Uma vez que fique claro a importância que poupar e investir, passaremos via *whattsapp* uma planilha do *excel* para que os alunos preencham seus gastos mensais e quanto podem investir mensalmente, isso ajudará a visualizar onde estão os gastos desnecessários, pediremos que os alunos preencham a planilha em casa.

Após isso, faremos alguns comparativos entre os investimentos mais comuns entre os brasileiros, sempre questionando os alunos sobre o que pensam sobre cada forma de investimento e, em seguida, discorrendo sobre eles. Durante a explicação, usaremos termos que talvez não sejam familiares aos alunos, então explicaremos o que cada um significa, quando forem citados.

FINANCIAMENTO X CONSÓRCIO

Financiamento:

O financiamento é uma antecipação de crédito, ou seja, trata-se de um contrato entre quem precisa de dinheiro (pessoa física ou jurídica) e uma instituição financeira capaz de fornecê-lo (bancos e cooperativas). A modalidade é usada para fins específicos, como a compra de um imóvel ou de um veículo.

Quem recorre a essa opção consegue adquirir bens de alto valor, mas com condições facilitadas de pagamento. A pessoa quitará a dívida aos poucos, em prestações acrescidas de juros, sendo o bem financiado a garantia do negócio. Assim, se por acaso o cliente atrasar as parcelas ou cair na inadimplência, o produto poderá ser tomado pela instituição financeira e até ir a leilão.

Solicitaremos que eles mencionem vantagens e desvantagens do financiamento. Caso necessário apresentaremos algumas vantagens e desvantagens.

Vantagens do financiamento:

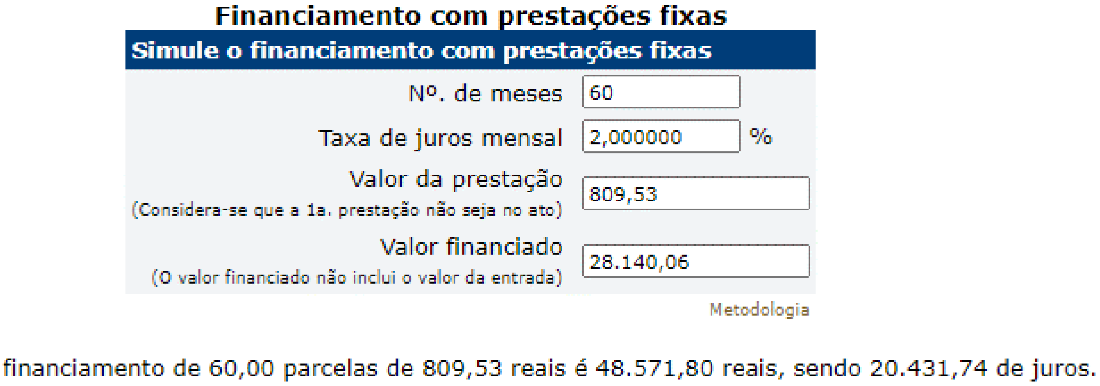
- Prazos mais longos de até 35 anos, quando se trata de financiamento imobiliário ou até 5 anos para financiamento de veículos;
- Taxas baixas, especialmente tempos de Selic em mínima histórica;
- Também é possível contratar com uma parcela que caiba no orçamento;
- Indicado para quem quer receber o bem de imediato.

Desvantagens do financiamento:

- Endividamento de longo prazo;
- Exige valor mínimo de entrada (no caso de imóveis);
- Juros que tornam o bem mais caro ao final do prazo;
- Análise de crédito pode aumentar o valor dos juros e, consequentemente, valor pago ao final do prazo;
- Condições exigidas pelo credor, como abertura de conta;
- CET (Custo Efetivo Total) com tarifas e taxas extras.

Exemplo:

Figura 31 - Financiamento fixo.



Fonte: Os autores. Criada em 16 nov. 2023.

Consórcio:

Neste modelo de compra, vários compradores se unem e pagam todos os meses parcelas necessárias para comprar um bem de interesse comum. No entanto, todo mês, somente uma minoria receberá a carta de crédito para adquirir aquele bem. Para eleger quem receberá a carta do carro, imóvel ou crédito são feitos sorteios mensais no qual o sorteado obtenha, porém existe a possibilidade do recebimento antecipado através do maior lance, que ocorre quando algum ou vários consorciados adiantam valores que poderiam ser pagos futuramente, similar a um leilão, contudo nenhuma das formas garante a contemplação imediata.

A empresa que gerencia o consórcio cobra taxas por volta de 15% a 30% do valor do bem para administrar o processo. Quem desistir do negócio no meio do caminho receberá o dinheiro pago, mas arcará com uma espécie de multa e esperará até o final do consórcio para o recebimento.

Os consórcios têm correção monetária que ocorrem anualmente sobre o crédito, por meio de índices definidos em contrato (INPC / IGPM / INCC, IPCA) que, consequentemente, reajustam as parcelas proporcionalmente. Para os não contemplados é uma ótima atualização, pois sua carta será corrigida periodicamente.

Solicitaremos que eles mencionem vantagens e desvantagens do consórcio. Caso necessário apresentaremos algumas vantagens e desvantagens.

Vantagens do consórcio:

- Parcelas menores e valor total tendem a ser mais baixos;

- Possibilidade de parcelas mais baixas no início e mais altas somente após contemplação;
- Não exige valor de entrada;
- Indicado para quem não possui autocontrole na hora de guardar dinheiro.

Desvantagens do consórcio:

- Não há garantias de recebimento imediato da carta de crédito;
- Taxas/multas por desistência;
- Após contemplação, torna-se uma dívida podendo alienar (tomar) o bem como garantia contra a inadimplência;
- Prazos tendem a ser menores que no financiamento;
- Caso a contemplação ocorra rapidamente, seu bem custará mais caro do que o valor recebido, se assemelhando a um financiamento.

Caso a contemplação demore, o valor pago mensalmente poderia ser investido, diminuindo, assim, os meses de comprometimento com parcelas ou “aportes” mensais em caso de investimento.

Exemplo:

Figura 32 - Exemplo de financiamento.

Fonte: Os autores. Criada em 16 nov. 2023.

Obs.: Parcelas a partir do mês aniversário do consórcio (anualmente) sofrem reajuste a partir de índice fixado na assinatura de contrato (IPCA, INCC...)

Pediremos que os alunos analisem em quanto tempo através de um investimento em renda fixa (fixando um retorno de 1% a.m.) um investidor conseguiria o valor financiado. Após faremos a mesma relação com o consórcio. Utilizaremos uma planilha e calculadora de investimento para encontrar os valores das parcelas e, consequentemente, o valor investido todo mês.

Figura 33 - Planilha financiamento.

FINANCIAMENTO C/ PRESTAÇÕES FIXAS	
VALOR FINANCIADO	30000,00
JUROS (A.M)	2,00%
PERÍODO (MESES)	60
VALOR TOTAL PAGO	51782,34
VALOR POR PARCELA	863,04

CONSÓRCIO	
VALOR DO CRÉDITO	30000,00
TAXA DE ADMINISTRAÇÃO	18%
OUTRAS TAXAS (FUNDO DE RESERVA E SEGURO DE VIDA)	2%
TOTAL DE TAXAS	20%
PERÍODO (MESES)	60
VALOR DAS PARCELAS 1 ANO	600,00
VALOR DAS PARCELAS 2 ANO	622,50
VALOR DAS PARCELAS 3 ANO	649,33
VALOR DAS PARCELAS 4 ANO	678,68
VALOR DAS PARCELAS 5 ANO	746,95
VALOR PAGO AO FINAL	**39569,57**

ANO INFLAÇÃO ACUMULADA/ANO DE APLICAÇÃO	PERCENTUAL
2018/2019	**3,75%**
2019/2020	**4,31%**
2020/2021	**4,52%**
2021/2022	**10,06%**

Fonte: Os autores. Criada em 16 nov. 2022

Figura 34 - Planilha juros.

JUROS COMPOSTOS C/ APORTE MENSAL - FINANCIAMENTO	
PERÍODO	VALOR
1	863,04
2	1734,71
3	2615,10
4	3504,29
5	4402,37
6	5309,44
7	6225,57
8	7150,87
9	8085,41
10	9029,31
11	9982,64
12	10945,51
13	11918,00
14	12900,22
15	13892,26
16	14894,23
17	15906,21

JUROS COMPOSTOS C/ APORTE MENSAL - CONSÓRCIO	
PERIODO	VALOR
1	500,00
2	1005,00
3	1515,05
4	2030,20
5	2550,50
6	3076,01
7	3606,77
8	4142,84
9	4684,26
10	5231,11
11	5783,42
12	6341,25
13	6923,41
14	7511,40
15	8105,26
16	8705,06
17	9310,87

CONSÓRCIO		
APORTE MENSAL	TX DE JUROS (INVESTIMENTO)	PERÍODO
500,00	1,00%	60
518,75		
541,11		
565,57		
622,46		

FINANCIAMENTO		
APORTE MENSAL	TX DE JUROS (INVESTIMENTO)	PERÍODO
863,04	1,00%	60

ANO INFLAÇÃO ACUMULADA/ANO DE APLICAÇÃO	PERCENTUAL
2018/2019	**3,75%**
2019/2020	**4,31%**
2020/2021	**4,52%**
2021/2022	**10,06%**

Fonte: Os autores. Criada em 18 nov. 2022

Após a comparação diferenciaremos, brevemente, ativos de passivos:

ATIVO – tudo que gera receita.
PASSIVO – Tudo que gera despesa.

30 minutos

Em seguida, faremos o intervalo de 20 minutos.

Retornando do intervalo, falaremos sobre alguns tipos de rendimento, iniciando pela renda fixa.

Questionaremos os alunos a respeito do assunto, perguntando o que acham que seria essa modalidade de investimento e, a partir das respostas dadas, apresentaremos um breve conceito de renda fixa (Anexo XIV).

Renda fixa é todo tipo de investimento que tem regras de rendimento definidas antes. Na hora de aplicar, o investidor já fica sabendo o prazo e a taxa de rendimento ou o índice que será usado para valorizar o dinheiro investido.

Após isso, apresentaremos alguns tipos de investimentos em renda fixa:

Figura 35 - Tipos de renda fixa.

Quais são os tipos de renda fixa?

Poupança: É a aplicação mais popular do país. É fácil de aplicar, sacar e não paga Imposto de Renda. O rendimento é mensal, sendo atualizado sempre na data de abertura.

Tesouro Direto (títulos do governo): Nessa aplicação o emissor é o governo federal. Há títulos prefixados, como o Tesouro Prefixado, e títulos pós-fixados, como o Tesouro Selic ou o Tesouro IPCA+.

CDBs e RDBs: São exemplos de aplicações de renda fixa em títulos de bancos.

Debêntures e Notas Promissórias: são exemplos de aplicações em títulos de renda fixa de empresas.

LCIs e LCAs: Também é como emprestar dinheiro para o banco em troca de uma taxa de juros (o rendimento do título).

Fundos de investimento: É possível aplicar em renda fixa por meio de fundos de investimento. Da mesma forma que os ativos de renda fixa se dividem em prefixados e pós-fixados, os fundos de investimento renda fixa também se dividem nessas duas categorias.

Fonte: Os autores. Criada em 28 jul. 2022.

Definidos os diferentes tipos de investimentos em renda fixa perguntaremos quais eles acharam mais interessantes e fariam aportes, se possível. Verificaremos as escolhas e os motivos que levaram cada um a fazer a escolha e abriremos espaço para uma breve discussão entre os alunos. A intenção é que todos participem e deem sua opinião sobre o tipo de investimento que acha mais interessante.

25 minutos

Subsequente a isso, falaremos sobre os mercados de renda variável. Relembraremos a tabela construída no início do encontro e apresentaremos outros dois gráficos de investimentos em renda fixa (Anexo XIV). Ao olharmos para os gráficos, falaremos, oralmente, o que é um tesouro pré-fixado.

O tesouro direto prefixado é um título de renda fixa com taxas de juros determinadas no momento da contratação. Ou seja, quando você empresta o seu dinheiro ao governo e já sabe de cara exatamente o quanto vai receber ao final do prazo do título.

Figura 36 - Rendimento tesouro prefixado 2024.

Fonte: Einvestidor. Acesso em 14 nov 2022.

Figura 37 - Rendimento tesouro prefixado 2026.

Fonte: Einvestidor. Acesso em 14 nov. 2022.

Usaremos esses gráficos para comparar, no longo prazo, investimentos em renda fixa, com investimentos em renda variável. Pediremos que os alunos olhem para alguns ativos nacionais e internacionais (Anexo XIV)

Figura 38 - Valorização das ações da Unipar.

Fonte: Google. Acesso em 16 nov. 2022.

Figura 39 - Valorização do índice S&P500.

Fonte: Google. Acesso em 16 nov. 2022.

Figura 40 - Valorização do Bitcoin desde 2015.

Fonte: Google. Acesso em 16 nov. 2022.

Faremos uma breve análise desses gráficos, os comparando com os gráficos de renda fixa mostrados anteriormente, e então definiremos o que é o mercado de renda variável (Anexo XIV):

Investimentos de renda variável são aqueles cujo retorno é imprevisível no momento do investimento. O valor varia conforme as condições do mercado – e, consequentemente, a remuneração que as aplicações oferecem segue esse mesmo princípio.

25 minutos

Definido o que é renda variável, explicaremos, oralmente, alguns tipos de investimento em renda variável, questionando os alunos sobre o que imaginam que seja determinando tipo de investimento e, em seguida, discorrendo sobre ele.

Ações: Uma ação representa a menor parcela em que se divide o capital de uma empresa organizada em forma de sociedade anônima (S.A.). O objetivo de uma S.A., ao abrir seu capital, é captar recursos dos investidores, normalmente para a sua expansão. Dessa forma, a abertura de capital é menos custosa para a empresa do que tomar um empréstimo, por exemplo.

BDRs – Brazilian Deposit Receipt (Recibo de depósito brasileiro): um BDR é um **recibo de compra de ações estrangeiras**. Nesse caso, em vez de comprar uma ação, como fazemos normalmente em negociações na bolsa de valores, compramos um comprovante que representa uma ação. Por isso, quando adquirimos um BDR, não nos tornamos sócios de uma empresa estrangeira. Essa é apenas uma forma de expor nosso capital à uma moeda internacional, como o dólar.

ETFs – Exchange Traded Funds (fundo de índice): Basicamente, investidores desse ativo estão interessados em adquirir papéis variados de uma cesta que replica um determinado indicador do mercado financeiro.

<u>FIIs – Fundos de Investimento Imobiliário</u>: são formados quando várias pessoas com o mesmo objetivo (<u>investir</u> em ativos imobiliários) juntam seu capital para esse fim.

Criptomoedas: o que são?

É um sistema ponto a ponto que permite a qualquer pessoa enviar e receber pagamentos de qualquer lugar. Em vez do dinheiro físico transportado e trocado no mundo real, os pagamentos em criptomoeda existem unicamente como valores digitais em um banco de dados online que documenta as transações específicas.

25 minutos

Após isso, salientaremos sobre os riscos de se investir em renda variável, citando casos de ações que perderam valor no decorrer do tempo, como Oi, Magazineluiza etc.

Posterior a isso, comentaremos sobre como investir, falaremos sobre corretoras e bancos que permitem investimentos variados, tanto em renda fixa, como em renda variável.

Para finalizar o Encontro, faremos o fechamento do conteúdo, relembrando o que foi tratado durante a aula e, como prometido no Encontro 6, deixaremos de 10 à 15 minutos para tirarmos dúvidas de última hora para o ENEM sobre algum conteúdo de matemática.

Avaliação:

Realizaremos de forma contínua no decorrer da aula, na qual avaliaremos a desenvoltura dos alunos ao responder os questionamentos feitos pelos estagiários, bem como a participação durante as resoluções dos problemas propostos.

Referências bibliográficas:

BARNABÉ, Fernando. **Introdução aos investimentos financeiros**. Disponível em: https://novaescola.org.br/planos-de-aula/fundamental/9ano/multicomponentes/introducao-aos-investimentos-financeiros/6528#section-sobreOPlano-5. Acesso em: 14 nov. 2022.

GOUVEIA, Rosimar. **Juros compostos**. Disponível em: https://www.todamateria.com.br/exercicios-de-juros-compostos/. Acesso em: 16 nov. 2022.

LUIZ, Robson. "**Matemática financeira**"; Brasil Escola. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/matematica-financeira.htm. Acesso em 16 de novembro de 2022.

MENEZES, Fabio. **Como o dinheiro rende**. Disponível em: https://novaescola.org.br/planos-de-aula/fundamental/9ano/matematica/como-o-dinheiro-rende/6520. Acesso em: 14 nov. 2022.

OLIVEIRA, Raul Rodrigues de. **"Juro simples**"; Brasil Escola. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/juros-simples.htm. Acesso em 18 de novembro de 2022.

PATRASSO, Rahel. **O que é renda variável? Quais são os tipos, os riscos e como investir?** Disponível em: https://economia.uol.com.br/guia-de-economia/o-que-e-renda-variavel-entenda-e-veja-como-investir.htm. Acesso em: 14 nov. 2022.

RALLO, Juan Ramón. **Bitcoin versus moedas estatais digitais: as cruciais diferenças para seu bem-estar financeiro futuro**. Disponível em: https://www.mises.org.br/article/3308/bitcoin-versus-moedas-estatais-digitais-as-cruciais-diferencas-para-seu-bem-estar-financeiro-futuro. Acesso em: 14 nov. 2022.

11.2. RELATÓRIO DO ENCONTRO VII.

Número de alunos: 12 alunos.

Conteúdos desenvolvidos na aula: Educação financeira.

No encontro VII estiveram presentes 12 alunos. Um de nós, estagiários, estava ausente por motivos de saúde. Não houve intercorrências durante o encontro.

Iniciamos a aula recebendo os alunos e os alocando em semicírculo. Começamos a aula reservando os minutos iniciais para tirar dúvidas, resolver exercícios e relembrar alguns conceitos e fórmulas do encontro passado.

Logo após, para introduzir o conteúdo da aula, fizemos perguntas sobre as finanças dos alunos, o que faziam com o dinheiro que ganhavam, se tinham uma vida financeira ativa ou se participavam, ao menos, das finanças da família, se tinham hábitos de controle de gastos, de poupar dinheiro etc. Pedimos, então, para que eles anotassem em seus cadernos os seus ganhos e gastos mensais, calculando os percentuais de cada item em relação ao todo. Enquanto efetuavam a atividade, entregamos a lista do encontro.

Tendo todos os alunos concluído a atividade, questionamos se algum deles estava com um saldo negativo ao final do mês, ou seja, se gastavam mais do ganhavam. Dois deles compartilharam os gastos mensais da família e relataram que a diferença entre ganhos e gastos era muito grande, tendo um saldo negativo considerável. Diante das respostas dos alunos, explanamos a importância de não gastar mais do que se recebe e guardar um valor para emergências ou para atingir metas e sonhos futuros. Indicamos duas maneiras para isso, poupando uma certa quantia todo mês ou investindo para render.

Em seguida, apresentamos aos alunos, através de *slides*, uma lista sobre os investimentos preferidos dos brasileiros, estando a poupança em primeiro lugar. Comentamos que esta, apesar de ser o investimento mais conhecido e usado, não é o mais vantajoso ou rentável, e que há outras opções.

Para exemplificar as diferenças entre investimentos, pedimos que os alunos fizessem uma simulação para três situações diferentes: para uma pessoa que apenas guarda dinheiro, uma que guarda na poupança e outra que aplica em um investimento que rende 9% ao ano. Para isso, disponibilizamos um *link* para acesso a uma calculadora online para fazer os cálculos. A título de comparação, sugerimos que eles construíssem uma tabela para organizar os valores obtidos.

Os alunos, com a atividade completa, concluíram que o investimento a 9% ao ano era o mais rentável e que apenas guardar dinheiro “dentro do colchão” não era uma boa opção, o que era uma forma de poupar que muitos utilizavam.

Após essa atividade, introduzimos o conceito de juro simples, mostrando a fórmula e explicando sobre cada coeficiente que a compõe, bem como o seu gráfico. Propomos que os alunos resolvessem o Problema 1 (Anexo XV) para aplicar e fixar a fórmula do juro simples. Percebemos que não houve dificuldades no entendimento da resolução do problema. Então demos continuidade e apresentamos o juro composto, comentando sobre as diferenças com o juro simples. A fórmula do juro simples é uma função afim, enquanto a do juro composto é uma função exponencial. Sobre o comportamento dos gráficos, embora cresçam praticamente na mesma proporção no início, o gráfico do juro simples é uma reta, enquanto o juro composto não é retilíneo, e sua inclinação aumenta conforme o tempo. Reiteramos que, optando por investimentos, teremos o juro composto trabalhando em cima da quantia investida. Depois dessas explicações, dispensamos os alunos para o intervalo.

Retornando do intervalo, sugerimos que os alunos fizessem o Problema 2. Demos um tempo de dez minutos para que eles tentassem resolver, auxiliando sempre que tinham dúvidas. Assim que corrigimos o problema no quadro com a resolução proposta por nós, um aluno se voluntariou para escrever uma outra maneira, a qual ele usou, para responder o problema. Ele explicou que o problema não pedia por valores especificamente, apenas qual aplicação era mais rentável, então ele optou por trabalhar apenas com as taxas e verificar qual delas é mais alta.

Em seguida, falamos brevemente sobre o CDB (Certificado de Depósito Bancário) como uma opção com maior rentabilidade que a poupança. Pedimos aos alunos que discorressem sobre o que pensavam sobre os tipos de investimentos e, então, começamos a falar sobre financiamento e consórcio.

Explicamos o que é um financiamento e como ele acontece, quais as circunstâncias em que ele ocorre, para que ele é usado e para quem ele é viável. Com a ajuda dos alunos, escrevemos no quadro quais as vantagens e desvantagens do financiamento. Fizemos o mesmo para o consórcio. Nesse momento os alunos compartilharam algumas experiências sobre o financiamento e expuseram uma posição de que financiamento não era conveniente em nenhuma situação, visto que o valor pago ao final era absurdamente grande. Logo depois, pedimos que os alunos analisassem em quanto tempo através de um investimento em renda fixa (fixando um retorno de 1% a.m.) um investidor conseguiria o valor financiado e mostramos uma planilha onde há um comparativo entre financiamento e consórcio. Também apresentamos como podemos manuseá-la para fazer simulações com valores diversos.

Após a comparação, comentamos a diferença entre ativos e passivos no âmbito financeiro, em que ativos é tudo o que gera receita e passivos o que gera despesa. Demos alguns exemplos para melhor assimilação dos alunos.

Continuamos falando sobre os tipos de rendimento, iniciando pela renda fixa, antes definindo-a e perguntando aos alunos quais suas opiniões sobre. Falamos, então, sobre cada tipo de investimento em renda fixa que estava disposto na lista (Anexo XIV). Pedimos que os alunos expusessem quais dos rendimentos eram mais atrativos para eles e em quais optariam em fazer aportes. Em sequência, falamos sobre os mercados de renda variável. Mais uma vez fizemos uma comparação entre os dois tipos de rendas por meio de gráficos. Destacamos, também, alguns ativos nacionais e internacionais por meio dos *slides* para que os alunos percebessem a movimentação financeira e definimos o que é um mercado de renda variável, ressaltando o fato da imprevisibilidade desse tipo de investimento e seus riscos.

Posterior a isso, comentamos sobre como investir, o trabalho das corretoras e a possibilidade dos bancos em permitir investimentos variados, tanto em renda fixa, como em renda variável.

No fim da aula, fizemos um fechamento sobre todo o conteúdo no Encontro e sugerimos que os alunos poderiam enviar dúvidas sobre as questões do ENEM para tirar dúvidas via grupo do *whatsapp* durante a semana, visto que a prova de matemática e suas tecnologias seria no dia seguinte ao encontro.

12. ENCONTRO VIII.

12.1. PLANO DE AULA – ENCONTRO VIII – 26/11/2022.

Público-Alvo: Alunos do 3° ano do Ensino Médio da rede pública estadual do Paraná.

Estagiários: Adrian Zanardi, Alexsandro André Alves de Freitas, Márcio Rocha e Meirielly Fernandes de Lima.

Conteúdo: Estatística.

Objetivo Geral: Obter os valores das medidas de tendência central de uma pesquisa estatística (média, moda e mediana) com a compreensão de seus significados e relacioná-las com gráficos.

Objetivos Específicos:

- Relembrar conceitos de média, mediana e moda;
- Interpretar dados de tabelas de acordo com o contexto;
- Calcular média, mediana e moda em um problema;
- Diferenciar média, mediana e moda.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 4 horas.

Recursos Didáticos:

Materiais impressos, quadro, giz, caderno, caneta, lápis, borracha.

Encaminhamento metodológico:

Iniciaremos o Encontro VIII recebendo os alunos e os alocando em semicírculo. Começaremos o Encontro resolvendo questões do ENEM 2022 como acordado com os alunos no Encontro VII, caso os alunos não tragam questões, resolveremos uma da Lista do Encontro VII (Anexo XV).

35 minutos

Começaremos o conteúdo de Estatística questionando os alunos sobre o que entendem por estatística. Após a respostas, definiremos brevemente:

A estatística é um ramo de grande importância da matemática, desenvolvendo técnicas como a coleta de dados e sua organização, interpretação, análise e representação.
A representação e interpretação desses resultados, estudamos a partir de gráficos, gerando-se medidas centrais, como a moda, mediana e média.

Em seguida, entregaremos a lista do Encontro VIII (Anexo XVI e Anexo XVII) e apresentaremos o problema 5 (Anexo XVII) que utilizaremos para definir média, mediana e moda.

Problema 1. (Enem 2011 - Adaptada) uma equipe de especialistas do centro meteorológico de uma cidade mediu a temperatura do ambiente, sempre no mesmo horário, durante 15 dias intercalados, a partir do primeiro dia de um mês. Esse tipo de procedimento é frequente, uma vez que os dados coletados servem de referência para estudos e verificação de tendências climáticas ao longo dos meses e anos.

As medições ocorridas nesse período estão indicadas no quadro:

Dia do mês	Temperatura (em °C)
1	15,5
3	14
5	13,5
7	18
9	19,5
11	20
13	13,5
15	13,5
17	18
19	20
21	18,5
23	13,5
25	21,5
27	20
29	16

Em relação à temperatura, os valores da moda, média e mediana são iguais a?

Perguntaremos aos alunos qual é a moda do problema acima, e caso tenha alguma resposta, perguntaremos o porquê da escolha. Após, definiremos moda:

A Moda (Mo) é o valor que mais aparece dentro de um conjunto quantitativo. Com isso, para identificá-la, é necessário encontrar a frequência de determinados dados, então basta calcular o termo de maior presença.

Resolução proposta: Verificamos no problema que $13{,}5°\,C$ se repete quatro vezes, $18°\,C$ se repete duas vezes, $20°\,C$ se repete três vezes e as demais temperaturas uma vez, logo a moda é $13{,}5\ C$.

Questionaremos, agora, qual é a média da atividade supracitada, e caso tenha alguma resposta, perguntaremos novamente o porquê da escolha. Após, definiremos média:

A média aritmética simples (Me) é calculada pela soma de todos os elementos do conjunto dividida pela quantidade de elementos do conjunto.

$$Me = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \ldots + X_n}{n}$$

Em que n é a quantidade de elementos.

Resolução proposta: Como dito no enunciado, temos 15 dias, nesse caso, 15 elementos, então somaremos todos os valores das temperaturas e dividiremos por 15, com isso encontraremos $17°\,C$.

Mostraremos que existe um outro tipo de média, conhecida como média aritmética ponderada.

Na média aritmética ponderada (Mep), são atribuídos pesos para cada um dos valores. Quanto maior for o peso, maior será a influência daquele determinado dado no valor da média aritmética ponderada.

$$Mep = \frac{(p_1 \cdot x_1) + (p_2 \cdot x_2) + (p_3 \cdot x_3) + \cdots + (p_n \cdot x_n)}{p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n}$$

Em que $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ são os pesos e $x1, x2, x3, \ldots\ xn$ são valores do conjunto.

Perguntaremos como poderíamos calcular o valor médio da temperatura a partir da média ponderada, indicando que o peso será o valor que cada temperatura se repete. Após isso, responderemos por meio da média ponderada.

Resolução proposta:

Na tabela do problema 1, temos quatro repetições do valor 13,5, uma repetição do valor 14, uma repetição do valor 15,5, uma repetição do valor 16, duas repetições do valor 18, uma repetição do valor 18,5, uma repetição do valor 19,5, três repetições do valor 20 e uma repetição do valor de 21,5.

$$Mep = \frac{(4 \cdot 13{,}5) + (1 \cdot 14) + (1 \cdot 15{,}5) + (1 \cdot 16) + (2 \cdot 18) + (1 \cdot 18{,}5) + (1 \cdot 19{,}5) + (3 \cdot 20) + (1 \cdot 21{,}5)}{4 + 1 + 1 + 1 + 2 + 1 + 1 + 3 + 1}$$

$$Mep = \frac{54 + 14 + 15{,}5 + 16 + 36 + 18{,}5 + 19{,}5 + 60 + 21{,}5}{15}$$

$$Mep = \frac{255}{15} = 17$$

Questionaremos, dessa vez, qual é a mediana da atividade, e caso tenha alguma resposta, perguntaremos o porquê da escolha. Após, definiremos mediana:

A Mediana (Md) significa a medida central de um conjunto de dados. O seu cálculo depende de certas regras: • Os valores quantitativos devem ser arrumados em ordem crescente ou decrescente. • Quando a quantidade de elementos forma um conjunto par, a mediana é o resultado da soma de duas medidas centrais divididas por dois, isto, é: (xm + xn) / 2. • Quando a quantidade de elementos forma um conjunto ímpar, a mediana é o valor que separa os lados maiores e menores do próprio conjunto.

Resolução proposta: A questão nos informa que temos 15 termos, com isso, existe um elemento que separa os menores e maiores valores. Organizando-os em ordem crescente, encontraremos, então, o valor de $18° \, C$.

Perguntaremos, na sequência, qual será o resultado da mediana caso tivéssemos um mês com 31 dias e temperatura de $16° \, C$ nessa data?

Aguardaremos respostas, e em seguida, responderemos.

Resolução proposta: Como temos 16 elementos agora, então obtemos dois termos centrais, no caso os números 16 e 18, logo a mediana (Md) será a média entre os dois valores, ou seja, $17° \, C$.

50 minutos

Terminado Problema 1, pediremos que os alunos resolvam o Problema 2 (Anexo XVI) e daremos 15 minutos para resolução e então pediremos que algum voluntário resolva no quadro para o restante da turma.

Problema 2. Os valores dos salários dos funcionários de uma empresa estão representados na tabela a seguir:

Cargo	**Quantidade de funcionários**	**Salário**
Presidente	1	R$ 44.500,00
Gerentes	2	R$ 18.650,00
Supervisores	4	R$ 9.257,80
Consultores	80	R$ 3.525,00
Atendentes	2	R$ 1.980,27
Auxiliar de serviços gerais	1	R$ 1.212,00

Com base nos valores da tabela de salários dos funcionários da empresa, calcule:

a) A média salarial dessa empresa.

b) A mediana dos salários.

c) A moda dos salários.

Resolução proposta:

a) A média salarial dessa empresa configura-se como uma média aritmética ponderada.

Primeiro devemos multiplicar o salário e a quantidade de funcionários para cada cargo:

- Presidente: $44.500{,}00 \cdot 1 = 45.500{,}00$
- Gerentes: $18.650{,}00 \cdot 2 = 37.300{,}00$
- Supervisores: $9.257{,}80 \cdot 4 = 37.031{,}20$
- Consultores: $3.525{,}00 \cdot 80 = 282.000{,}00$
- Atendentes: $1.980{,}27 \cdot 2 = 3.960{,}54$
- Auxiliar de serviços gerais: $1.212{,}00 \cdot 1 = 1.212{,}00$

Agora devemos somar todos os valores e dividir pela quantidade total de funcionários:

$$Mep = \frac{45.500{,}00 + 37.300{,}00 + 37.031{,}20 + 282.000{,}00 + 3.960{,}54 + 1.212{,}00}{1 + 2 + 4 + 80 + 2 + 1}$$

$$Mep = \frac{407.003{,}74}{90} = 4.522{,}26$$

Portanto, a média salarial dessa empresa é de R$ 4.522,26.

b) Para calcular a mediana, primeiro temos que organizar os salários em ordem crescente:

$$1.212{,}00 - 1.980{,}27 - 3.525{,}00 - 9.257{,}80 - 18.650{,}00 - 44.500{,}00$$

A mediana será a média aritmética dos valores centrais:

$$Md = \frac{3.525{,}00 + 9.257{,}80}{2} = \frac{12.782{,}80}{2} = 6.391{,}40$$

A mediana dos salários é R$ 6.391,40.

c) A moda dos salários é o salário cujo há maior quantidade de funcionários, ou seja, R$ 3.525,00.

25 minutos

Terminada a correção e discussão, faremos o intervalo de 20 minutos.

Retornando do intervalo, trabalharemos os conceitos abordados utilizando um jogo: **‘O tabuleiro da estatística’**. Para o jogo, a turma será dividida em grupos de quatro alunos.

Tabuleiro da Estatística – Resumo do Jogo

- Cada grupo receberá um dado e 4 marcadores para o tabuleiro.
- Cada aluno jogará o dado uma vez em cada rodada.
- O número do dado será a quantidade de casas que seu marcador irá andar.

- Entregaremos ao grupo uma folha contendo o tabuleiro.
- Cada grupo receberá dois baralhos contendo perguntas sobre estatística e um baralho com informações do “Você sabia”.
- A cada casa que o marcador andar terá uma pergunta ou terá uma nova informação do “Você sabia”.
- A pergunta ou a informação estará em uma carta que será retirada por outro participante que lerá.
- A cada pergunta respondida corretamente o aluno permanecerá na casa, caso erre, então retornará a sua casa de origem.
- Ganha o jogo quem responder mais perguntas corretamente e chegar ao final do tabuleiro.

50 minutos

Após o jogo, faremos mais duas situações problema (Anexo XVI), daremos 15 minutos para resolução de cada uma e, em seguida, faremos as correções no quadro com ajuda dos alunos, relembrando o que foi abordado até o momento na aula.

Problema 3. Para calcular a média, somamos todos os valores e dividimos pela quantidade de valores:

$$média = \frac{32 + 34 + 27 + 29 + 28}{5} = \frac{150}{5} = 30$$

A média de precipitação nessa região é de 30 mm.

Para calcular a mediana, organizamos os dados em forma crescente:

$$27 - 28 - 29 - 32 - 34$$

A mediana é o valor central do conjunto de dados, ou seja, 29 mm.

Para calcular a variância devemos subtrair de cada valor do conjunto a média e elevamos o resultado ao quadrado:

- $(32 - 30)^2 = 2^2 = 4$
- $(34 - 30)^2 = 4^2 = 16$
- $(27 - 30)^2 = (-3)^2 = 9$
- $(29 - 30)^2 = (-1)^2 = 1$
- $(28 - 30)^2 = (-2)^2 = 4$

Por fim, somamos todos os valores e dividimos pelo número de dados.

$$variância = \frac{4 + 16 + 9 + 1 + 4}{5} = \frac{34}{5} = 6{,}8$$

A variância é de 6,8.

A partir deste problema, definiremos variância e desvio padrão:

A variância é uma medida de dispersão que mostra o quão distante cada valor desse conjunto está do valor central (médio).

Cálculo da variância:

$$Var.populacional = \frac{(x1 - x)^2 + (x2 - x)^2 + (x3 - x)^2 + \cdots + (xn - x)^2}{n}$$

O desvio padrão é uma medida que expressa o grau de dispersão de um conjunto de dados. Ou seja, o desvio padrão indica o quanto um conjunto de dados é uniforme. Quanto mais próximo de 0 for o desvio padrão, mais homogêneo são os dados.

O cálculo do desvio padrão é feito a partir da raiz quadrada positiva da variância. Portanto:

$$dp = \sqrt{var}$$

30 minutos

Problema 4. A nota final para uma disciplina de uma instituição de ensino superior é a média ponderada das notas A, B e C, cujos pesos são 1, 2 e 3, respectivamente. Paulo obteve A = 3,0 e B = 6,0. Quanto ele deve obter em C para que sua nota final seja 6,0?

Resolução proposta: Esquematizando essa média ponderada e chamando de x em C a nota que Paulo precisa obter, temos:

$$\frac{3 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + x \cdot 3}{1 + 2 + 3} = 6$$

$$\frac{3 + 12 + 3x}{6} = 6$$

$$3x + 15 = 36$$

$$3x = 21$$

$$x = \frac{21}{3}$$

$$x = 7$$

Portanto, para que Paulo obtenha nota final 6,0, ele precisa de nota 7,0 em C.

20 minutos

Terminadas as resoluções, relembraremos os conceitos aprendidos durante o encontro, questionando os alunos acerca do que se lembram se ter visto.

Avaliação:

Realizaremos de forma contínua no decorrer da aula, na qual avaliaremos a desenvoltura dos alunos ao responder os questionamentos feitos pelos estagiários, bem como a participação durante as resoluções dos problemas propostos.

Referências bibliográficas:

BRAGA BOSSO, Ellen Roberta. **Plano de aula: Conceituar e Calcular Média, Mediana e Moda**. Disponível em: https://novaescola.org.br/planos-de-aula/fundamental/8ano/matematica/conceituar-e-calcular-media-mediana-e-moda-medidas-de-tendencia-central/338. Acesso em: 21 nov. 2022.

OLIVEIRA, Raul Rodrigues de. **Enem**: **Lista De Exercícios Sobre Estatística.** Disponível em: https://exercicios.brasilescola.uol.com.br/exercicios-matematica/enem-lista-de-exercicios-sobre-estatistica-moda-media-e-mediana.htm. Acesso em: 21 nov. 2022.

OLIVEIRA, Raul Rodrigues de. **Estatística**. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/estatistica.htm/. Acesso em: 21 nov. 2022.

OLIVEIRA, Raul Rodrigues de. **Moda, Média e Mediana**. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/moda-media-mediana.htm. Acesso em: 21 nov. 2022.

OLIVEIRA, Raul Rodrigues de. **EXERCÍCIOS SOBRE ESTATÍSTICA**. Disponível em: https://exercicios.brasilescola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-estatistica.htm. Acesso em: 21 nov. 2022.

12.2. RELATÓRIO DO ENCONTRO VIII.

Número de alunos: 10 alunos.

Conteúdos desenvolvidos na aula: Estatística.

No encontro VIII estiveram presentes dez alunos. Inicialmente, tivemos a ausência de uma estagiária e o atraso de outro por conta de um concurso no mesmo horário da aula. Além disso, uma aluna atrasou-se por motivo análogo, contudo a aula não teve intercorrências.

Iniciamos recebendo os alunos e os alocando no miniauditório III. Reservando alguns minutos para resolvemos questões do ENEM 2022 do conteúdo de matemática, porém não houve uma solicitação prévia por parte dos alunos, com isso respondemos uma questão apresentada na lista do encontro VII, relembrando alguns conceitos da aula passada.

Logo após, introduzimos o conteúdo perguntando o que era estatística para eles, e posteriormente, definimos brevemente. Para aprofundarmos no assunto, falamos sobre os tipos de gráficos, mostrando os gráficos de pontos, linha, coluna e setor, apresentando, em sequência, alguns exemplos de como são representados e como aparecem em questões. Entregamos a lista do encontro VIII e perguntamos a respeito das medidas de tendência central, tentando aferir o conhecimento prévio a respeito do assunto. A partir de uma situação problema, definimos moda, média e mediana, disponibilizando um tempo para resolução das perguntas dadas no problema, contudo percebemos que os alunos tinham o domínio do conteúdo, tendo apenas dúvidas pontuais sobre o assunto.

Em seguida, passamos outra situação problema, deixando, dessa vez, que eles resolvessem, entretanto auxiliamos nas dúvidas no período em que resolviam. Por conta do pouco tempo até o intervalo, foi concedido cerca de dez minutos para resolução do exercício e após o retorno do intervalo, resolvemos o exercício proposto pontuando um modelo resolutivo a partir dos conceitos propostos.

Para atrair o interesse dos alunos, trouxemos uma dinâmica conhecida **“Tabuleiro da Estatística”** em que cada jogador lançava um dado a cada rodada tendo que responder questões relacionadas a conteúdo ou lendo “o você sabia” que falava de curiosidades e usabilidade da estatística ao longo da história humana. Dividimos a sala em duas equipes de quatro alunos e uma dupla, e posteriormente, explicamos as regras e funcionamento da dinâmica. Cada estagiário supervisionou uma equipe e a atividade ocorreu por volta de trinta a quarenta minutos até que alguns jogadores finalizassem a dinâmica.

Após o momento de descontração e aprendizado, explicamos brevemente variância e desvio padrão apresentando as fórmulas para calculá-las, utilizando novamente, uma situação problema para contextualizar e verificar o entendimento da turma.

Finalizamos o encontro relembrando os conteúdos estudados, verificando se houve alguma dúvida no desenrolar da aula. Em seguida, liberamos os alunos entregando um bombom a cada aluno para agradecer a presença no encontro.

13. ENCONTRO IX.

13.1. PLANO DE AULA – ENCONTRO IX – 03/12/2022.

Público-Alvo: Alunos do 3° ano do Ensino Médio da rede pública estadual do Paraná.

Estagiários: Adrian Zanardi, Alexsandro André Alves de Freitas, Márcio Rocha e Meirielly Fernandes de Lima.

Conteúdo: Probabilidade e análise combinatória.

Objetivo Geral: Calcular a probabilidade de um evento aleatório ocorrer e desenvolver raciocínio combinatório.

Objetivos Específicos:

- Identificar e resolver problemas de probabilidade;
- Relembrar o que é o princípio fundamental da contagem;
- Compreender relações entre as representações fracionárias, decimal e percentual;
- Resolver situações-problemas usando raciocínio combinatório no sentido de determinar a probabilidade de ocorrência do evento;
- Relacionar os conteúdos supracitados com situações do dia a dia.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 4 horas.

Recursos Didáticos:

Materiais impressos, quadro, giz, caderno, caneta, lápis, borracha, dados, projetor, slides e computador.

Encaminhamento metodológico:

Iniciaremos o Encontro IX recebendo os alunos e os alocando em grupos de quatro integrantes. Começaremos o Encontro resolvendo questões do Encontro VIII (Anexo XVI e Anexo XVII), de acordo com as dificuldades que os alunos tiveram ao resolvê-las. Tiradas as dúvidas, entregaremos a Lista do Encontro IX (Anexo XVIII e Anexo XIX).

25 minutos

Começaremos a trabalhar o conteúdo de probabilidade apresentando alguns problemas em forma de slides, estes problemas envolverão situações em que os alunos deverão escolher uma situação onde a probabilidade de atingirem um objetivo seja a maior possível. A partir das respostas dadas nos problemas, definiremos brevemente probabilidade.

As probabilidades são calculadas dividindo-se o número de resultados favoráveis pelo número de resultados possíveis, ou seja:

$$P = \frac{n(E)}{n(\Omega)}$$

Nesse caso, E é um evento que se quer conhecer a probabilidade, e Ω é o espaço amostral que o contém.

20 minutos

Em seguida, trabalharemos com uma dinâmica, o jogo **"Consórcio do chocolate"** que consiste em:

- Cada aluno receberá um número;
- A cada rodada um aluno será sorteado e escolherá um chocolate de sua preferência;
- Na primeira e quarta rodada, faremos um processo conhecido como "lance" na qual a equipe que tirar o maior valor no dado, participará de um sorteio em que somente os participantes do grupo poderão ser "contemplados";
- Sempre que houver rodadas especiais, teremos primeiro o sorteio dos lances e depois o sorteio convencional;
- No decorrer das rodadas, faremos perguntas sobre a probabilidade de um determinado evento ocorrer ou de algum evento que tenha ocorrido;
- Assim que todos forem contemplados, finalizaremos a dinâmica;

Exemplos de perguntas:

- Qual a probabilidade de um grupo participar do sorteio a partir do "lance"?

Resolução proposta:

$$P = \frac{1}{2}\, ou\ 50\%$$

Como trata-se de evento aleatório ou você pode ganhar ou perder, por mais que tenha a possibilidade de empate, porém gerará novas tentativas até que tenha um vencedor.

- Qual a probabilidade de uma pessoa ser contemplada na primeira rodada sendo que ele participa do grupo do “lance”, tendo ao todo 8 participantes e cada grupo tenha 4 integrantes?

Resolução proposta:

Como o sorteio ocorre inicialmente pelo lance, então a probabilidade é de $\frac{1}{4}$, mas o jogador pode ser sorteado de forma convencional, ou seja, $\frac{1}{7}$.

Como a pessoa pode ser sorteada em umas das opções, então teremos:

$$P = \frac{1}{4} + \frac{1}{7}$$

$$P = \frac{7+4}{28}$$

$$P = \frac{11}{28} \; ou \; 39{,}28\%$$

- Qual a probabilidade de uma pessoa A ser comtemplada no sorteio especial e uma pessoa B no sorteio convencional na primeira rodada, sendo os dois pertencentes ao grupo que participará do “lance”?

Resolução proposta:

Como a pessoa A participa do grupo que participará do lance e terá que ser contemplado, logo a probabilidade é de $\frac{1}{4}$. Para a pessoa B ser contemplada temos a probabilidade de $\frac{1}{7}$. Como esses eventos são independentes, logo o produto das probabilidades é o resultado para probabilidade inicial

$$P = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{7}$$

$$P = \frac{1}{28} \; ou \; 3{,}57\%$$

30 minutos

Após o jogo, definiremos eventos aleatórios e independente

Os **eventos aleatórios** são aqueles que possuem a mesma chance de

Nos **eventos independentes**, a probabilidade da ocorrência de um evento não afeta a probabilidade da ocorrência de outro.
Exemplo: Se lançarmos diversas moedas ao mesmo tempo, ou uma mesma moeda por consecutivas vezes, a probabilidade de encontrar coroa em um lançamento não interfere nos outros, por isso, cada resultado é independente do outro.

Apresentaremos outros dois casos:

Posterior a isto, resolveremos a questão 1 da Lista do Encontro IX (Anexo XVIII). Serão dados dez minutos para que os alunos resolvam e em seguida, faremos a resolução no quadro.

Problema 1. A *World Series* é a decisão do campeonato norte-americano de beisebol. Os dois times que chegam essa fase jogam, entre si, até sete partidas. O primeiro desses times que completar quatro vitórias é declarado Campeão.

Considere que, em todas as partidas, a probabilidade de qualquer um dos dois times vencer é sempre 1/2.

Qual é a probabilidade de o time campeão ser aquele que venceu a primeira partida da *World Series*?

Resolução proposta: Sejam dois times A e B. Iremos dividir as possibilidades

A probabilidade de dois ou mais eventos independentes ocorrerem conjuntamente é igual ao produto das probabilidades de ocorrerem separadamente, também conhecida como regra do ***e.***

A ocorrência de dois eventos que se excluem mutuamente é igual à soma das probabilidades com que cada evento ocorre, também conhecida como regra do ***ou.***

de jogos em casos. Em todos eles, iremos considerar que o time vencedor do primeiro jogo é o vencedor do último:

Com exatamente 4 jogos.

Tanto faz o vencedor do primeiro jogo. Suponha que tenha sido o time A. Assim, os próximos 3 jogos devem ser vencidos por A. Logo, a probabilidade desse cenário ocorrer é $\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{8} = \frac{8}{64}$.

Com exatamente 5 jogos.

Tanto faz o vencedor do primeiro jogo. Suponha que tenha sido o time A. Assim, dentre os outros 4 jogos, o último deles deve ser vencido por A e os demais devem ter duas vitórias de A e uma de B. Logo, a probabilidade desse cenário ocorrer é $\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.P_3^2 = \frac{3}{16} = \frac{12}{64}$.

Com exatamente 6 jogos.

Tanto faz o vencedor do primeiro jogo. Suponha que tenha sido o time A. Assim, dentre os outros 5 jogos, o último deles deve ser vencido por A e os demais devem ter duas vitórias de A e duas de B. Logo, a probabilidade desse cenário ocorrer é $\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.P_4^{2,2} = \frac{6}{32} = \frac{12}{64}$.

Com exatamente 7 jogos.

Tanto faz o vencedor do primeiro jogo. Suponha que tenha sido o time A. Assim, dentre os outros 6 jogos, o último deles deve ser vencido por A e os demais devem ter duas vitórias de A e três de B. Logo, a probabilidade desse cenário ocorrer é $\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.P_5^{2,3} = \frac{10}{32} = \frac{20}{64}$.

Somando as probabilidades desses cenários, temos

$$\frac{8}{64} + \frac{12}{64} + \frac{12}{64} + \frac{20}{64} = \frac{42}{64}.$$

20 minutos

Em seguidas, faremos o intervalo de 20 minutos.

Ao retornar do intervalo, trabalharemos o conteúdo de análise combinatória. Iniciaremos este conteúdo com uma dinâmica, o “**Jogo da Senha**.” Resumo dinâmica:

- Os alunos serão agrupados em duplas;
- O primeiro jogador sorteado irá criar uma senha composta com quatro cores distintas, selecionada dentro das seis cores possíveis;
- O segundo jogador não poderá visualizar a senha criada pelo primeiro jogador;
- Para tentar descobrir a senha, o segundo jogador deve escolher uma senha aleatória de 4 cores distintas e colocá-las na coluna de tentativas do tabuleiro;
- O primeiro jogador irá analisar a senha escolhida pelo segundo e irá preencher a coluna de análise do tabuleiro de acordo com as regras propostas;
- Ganha o jogo o jogador que descobrir a senha com o menor número de tentativas.

30 minutos

Terminada a atividade iremos questionar os alunos sobre as estratégias que cada um utilizou no jogo. Em seguida, iremos introduzir o conceito de análise combinatória.

A análise combinatória ou combinatória é a parte da Matemática que estuda métodos e técnicas que permitem resolver problemas relacionados com contagem. Muito utilizada nos estudos sobre probabilidade, ela faz análise das possibilidades e das combinações possíveis entre um conjunto de elementos.

O **princípio fundamental da contagem,** também chamado de princípio multiplicativo, em resumo, é a multiplicação do número de opções entre as que lhe são apresentadas.

Após a conceituação, iremos propor a resolução do Problema 5 (Anexo XIX). Daremos dez minutos para que os alunos resolvam e, em seguida, faremos a correção no quadro, com a participação da turma.

Problema 2. Uma lanchonete vende uma promoção de lanche a um preço único. No lanche, estão incluídos um sanduíche, uma bebida e uma sobremesa. São oferecidas três opções de sanduíches: hambúrguer especial, sanduíche vegetariano e cachorro-quente completo. Como opção de bebida, pode-se escolher 2 tipos: suco de maçã ou guaraná. Para a sobremesa, existem quatro opções: cupcake de cereja, cupcake de chocolate, cupcake de morango e cupcake de baunilha. Considerando todas as opções oferecidas, de quantas maneiras um cliente pode escolher o seu lanche?

Resolução Proposta: Vamos resolver o problema usando o princípio multiplicativo. Para determinar as diferentes possibilidades de lanches, basta multiplicar o número de opções de sanduíches, bebidas e sobremesa.

Total de possibilidades: $3.2.4 = 24$

Portanto, temos 24 tipos diferentes de lanches para escolher na promoção.

15 minutos

Terminada a resolução, definiremos o que é um fatorial:

O fatorial de um número natural é definido como o produto deste número por todos os seus antecessores. Utilizamos o símbolo ! para indicar o fatorial de um número. Define-se ainda que o fatorial de zero é igual a 1.

Resolveremos um exemplo no quadro para fixação da definição:

Exemplo:

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

$$3! = 3.2.1 = 6$$

$$7! = 7.6.5.4.3.2.1 = 5\,040$$

$$10! = 10.9.8.7.6.5.4.3.2.1 = 3\,628\,800$$

Posteriormente, pediremos que os alunos resolvam os Problemas 6, 7 e 8 (Anexo XIX), a partir deles, definiremos arranjo, permutação e combinação, serão dados cinco minutos para resolução de cada Problema, antes da conceituação e resolução.

Problema 3. É preciso escolher um representante e um vice representante de uma turma, com 20 alunos. Sendo que o mais votado será o representante e o segundo mais votado o vice representante.

Dessa forma, de quantas maneiras distintas a escolha poderá ser feita?

Nos **arranjos**, os agrupamentos dos elementos dependem da ordem e da natureza dos mesmos.

Para obter o arranjo simples de **n** elementos tomados, p a p (p ≤ n), utiliza-se a seguinte expressão:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Resolução Proposta: Observe que nesse caso, a ordem é importante, visto que altera o resultado.

$$A_{20,2} = \frac{20!}{(20-2)!} = \frac{20.19.18!}{18!} = 380$$

Logo, o arranjo pode ser feito de 380 maneiras diferentes.

Problema 4. De quantas maneiras diferentes 6 pessoas podem se sentar em um banco com 6 lugares?

> As **permutações** são agrupamentos ordenados, onde o número de elementos (n) do agrupamento é igual ao número de elementos disponíveis.
>
> Note que a permutação é um caso especial de arranjo, quando o número de elementos é igual ao número de agrupamentos. Desta maneira, o denominador na fórmula do arranjo é igual a 1 na permutação.
>
> Assim a permutação é expressa pela fórmula:
>
> $$P_n = n!$$

Resolução Proposta: Como a ordem em que irão se sentar é importante e o número de lugares é igual ao número de pessoas, iremos usar a permutação:

$$P_{6=6!=6.5.4.3.2.1=720}$$

Logo, existem 720 maneiras diferentes para as 6 pessoas se sentarem neste banco.

Problema 5. Devemos escolher 3 membros para formar uma comissão organizadora de um evento, dentre 10 pessoas que se candidataram.

De quantas maneiras distintas essa comissão poderá ser formada?

> As **combinações** são subconjuntos em que a ordem dos elementos não é importante, entretanto, são caracterizadas pela natureza dos mesmos.
>
> Assim, para calcular uma combinação simples de *n* elementos tomados p a p (p ≤ n), utiliza-se a seguinte expressão:
>
> $$C_{n,p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Resolução Proposta: Note que, ao contrário dos arranjos, nas combinações a ordem dos elementos não é relevante. Isso quer dizer que escolher: Maria, João e José, é equivalente a escolher: João, José e Maria.

$$C_{10,3} = \frac{10!}{3!\,(10-3)!} = \frac{10.9.8.7!}{3!.7!} = \frac{10.9.8}{3.2.1} = 120$$

Observe que para simplificar os cálculos, transformamos o fatorial de 10 em produto, mas conservamos o fatorial de 7, pois, desta forma, foi possível simplificar com o fatorial de 7 do denominador.

Assim, existem 120 maneiras distintas formar a comissão.

50 minutos

Encerraremos o Encontro fazendo o fechamento do conteúdo, a partir de questionamentos aos alunos, sobre o que foi estudado durante o Encontro e relembrando alguns conceitos.

5 minutos

Avaliação:

Realizaremos de forma contínua no decorrer da aula, na qual avaliaremos a desenvoltura dos alunos ao responder os questionamentos feitos pelos estagiários, bem como a participação durante as resoluções dos problemas propostos.

Referências bibliográficas:

FLORES, Denisele. **Regra do ou e e**. Disponível em: https://escolaeducacao.com.br/regra-do-e-e-do-ou/. Acesso em: 29 nov. 2022.

LUIZ, Robson. **"Análise combinatória"**; Brasil Escola. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/analise-combinatoria.htm. Acesso em 30 de novembro de 2022.

MOREIRA, Luiz Paulo. **Probabilidade.** Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/probabilidade.htm. Acesso em: 22 nov. 2022.

NOÉ, Marcos. **POSSIBILIDADES MATEMÁTICAS**. Disponível em: https://educador.brasilescola.uol.com.br/estrategias-ensino/possibilidades-matematicas.htm. Acesso em: 29 nov. 2022.

OLIVEIRA, Raul Rodrigues de. **Análise Combinatória**. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/analise-combinatoria.htm. Acesso em: 29 nov. 2022.

SANTOS, Gislaine Beatriz Teixeira. **Plano de aula: Probabilidade e as formas de representá-la**. Disponível em: novaescola.org.br/planos-de-aula/fundamental/6ano/matematica/probabilidade-e-as-formas-de-representa-la. Acesso em: 22 nov. 2022.

SILVA, Marcos Noé Pedro da. **Exercícios sobre Combinação Simples**. Disponível em: https://exercicios.brasilescola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-combinacao-simples.htm. Acesso em: 29 nov. 2022.

13.2. RELATÓRIO DO ENCONTRO IX.

Número de alunos: 11 alunos.

Conteúdos desenvolvidos na aula: Probabilidade e análise combinatória.

No encontro IX estavam presentes 11 alunos. Uma aluna chegou com atraso, mas no decorrer da aula não houve intercorrências.

Os alunos foram orientados a se sentarem em grupos pois haveria uma atividade mais adiante que necessitaria dessa formação. Dado o número ímpar, organizou-se três grupos e um aluno optou por permanecer sozinho para a atividade posterior.

Iniciando sobre o tema a ser abordado na aula, apresentamos por meio de *slides* o **"Jogo com dados e moedas"**, onde questionamos aos alunos, em cada problema, qual tinha a maior chance de acontecer, se era a situação com os dados ou com as moedas. Logo após as respostas, explicamos qual era a resposta correta. Nesse momento em que esperávamos ouvir qual era lógica usada pelos alunos para responder os problemas e o que eles já conheciam sobre probabilidade, notamos que os primeiros problemas eram fácil e rapidamente respondidos e, à medida em que as situações aumentavam o grau de dificuldade, alguns preferiram se abster de responder ou concordavam com as respostas de outros.

Entregamos, ao fim dessa introdução, a lista do encontro e falamos sobre a definição de probabilidade, relacionando os conceitos de evento e espaço amostral à atividade anterior. Em seguida, propomos a dinâmica **"Consórcio do chocolate"** como forma de exemplificar, mais uma vez, uma aplicação de probabilidade à realidade. Explicamos quais eram as regras para aquela dinâmica, em que haveria um lance onde os grupos teriam de tirar o maior número em um dado de seis faces e um integrante do grupo que ganhou o lance participaria de um sorteio para ser contemplado com um chocolate de uma caixa. Frisamos sobre como funcionava o consórcio, onde os primeiros a ganharem teriam uma maior variedade de chocolates para escolherem e que esta iria diminuir conforme o número de ganhadores. Também reforçamos que o aluno que decidiu fazer a dinâmica sozinho não participaria dos lances com os dados e que só poderia ganhar através do sorteio, pela sorte, e que poderia haver a consequência de que ele seria o último a ganhar devido às suas chances menores a que dos outros.

A dinâmica aconteceu de forma descontraída e divertida. Os alunos lamentavam a falta de sorte e nós aproveitamos cada momento de lance e sorteio para escrevermos no quadro qual era a probabilidade envolvida no momento. Após algumas rodadas, muitos já haviam entendido a matemática por trás da dinâmica e calculavam as probabilidades sozinhos. Quando todos os alunos foram contemplados, encerramos a dinâmica.

Dando continuidade à aula, definimos eventos aleatórios e eventos independentes e comentamos como podemos reconhecê-los por meio de exemplos, além das regras do ‘e’ do ‘ou’ para probabilidade e quando aplicá-las, ou seja, em que momentos devemos calcular o produto das probabilidades ou quando devemos somá-las.

Posterior a isso, pedimos aos alunos que resolvessem a questão 1 da lista do encontro que, inclusive, era uma questão presente no ENEM 2022, o qual alguns tinham participado. Auxiliamos nos grupos para dar um encaminhamento para a resolução da questão, porém quando começamos a resolver no quadro, percebemos que não havíamos abordado o conteúdo de análise combinatória que se exigia na resolução da questão. Pedimos desculpas aos alunos e dizemos que voltaríamos a essa questão ao final da aula, depois de apresentarmos o conteúdo restante. Também pedimos aos alunos que a questão 3 fosse resolvida por eles, o que não levou muito tempo e nem gerou dúvidas quanto ao processo durante a correção no quadro. Sendo assim, liberamos os alunos para o intervalo.

Ao voltar do intervalo, abordamos análise combinatória com uma nova dinâmica denominada **“Jogo da senha”**. Agora em duplas, os alunos tinham o objetivo de descobrir, com o menor número de tentativas possível, a senha de 4 cores distintas do outro colega, com o auxílio de correções feitas por quem criou a senha. Observamos os alunos jogarem com afinco e depois, questionamos sobre quais as estratégias que cada um adotou para o jogo e relacionamos a dinâmica com o conteúdo, explicando que a dinâmica tinha o objetivo de que eles analisassem as combinações de senhas de acordo com o retorno que eles tinham a cada tentativa. Debatemos acerca das respostas dos alunos ao questionário que entregamos depois que terminaram o jogo.

Em seguida, explanamos sobre o princípio fundamental da contagem e propomos que os alunos fizessem a questão 5. Durante o tempo em que eles estavam resolvendo não houve dúvidas quanto à aplicação do conceito multiplicativo e, após a correção coletiva no quadro, definimos fatorial, conceito importante para a apresentação das fórmulas de arranjo, combinação e permutação que fizemos logo depois. Realçamos como diferenciar entre as três situações, quando a ordem importa ou não. Assim, propomos que os alunos resolvessem as questões 6, 7 e 8 sobre análise combinatória. Os alunos trabalharam de forma rápida durante o tempo dado, sem maiores dificuldades.

Encerramos o encontro fazendo o fechamento do conteúdo, a partir de questionamentos aos alunos. Pedimos que resumissem o que foi apresentado no encontro com suas palavras e comentassem sobre os pontos que eles achavam importantes.

14. ENCONTRO X.

14.1. PLANO DE AULA – ENCONTRO X – 10/12/2022.

Público-Alvo: Alunos do 3° ano do Ensino Médio da rede pública estadual do Paraná.

Estagiários: Adrian Zanardi, Alexsandro André Alves de Freitas, Márcio Rocha e Meirielly Fernandes de Lima.

Conteúdo: Raciocínio lógico.

Objetivo Geral: Revisar os conteúdos trabalhados no PROMAT através de atividades interativas.

Objetivos Específicos:

- Desenvolver raciocínio lógico;
- Calcular expressões algébricas;
- Introduzir jogos relacionados a conteúdos anteriormente trabalhados;
- Estimular o enriquecimento do pensamento matemático;
- Sintetizar o ideal de cada proposta de atividade.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 4 horas.

Recursos Didáticos:

Materiais utilizados durante os jogos.

Encaminhamento metodológico:

Este encontro será o de encerramento PROMAT e será trabalhado em conjunto com as demais turmas do projeto. Serão desenvolvidas atividades, jogos e brincadeiras em equipe, trabalhando conteúdos vistos durante os nove encontros anteriores.

Inicialmente, os alunos serão divididos em grupos de quatro alunos, os grupos terão que participar de diferentes dinâmicas durante a manhã, competindo entre si. Será formado uma espécie de circuito pela Unioeste e os grupos se deslocarão pela Universidade, completando as dinâmicas no menor tempo possível e, no fim da manhã, consagraremos a equipe vencedora.

As atividades trabalhadas serão:

Jogo: ‘Torre de Hanói’.

A Torre de Hanói é um dos mais famosos jogos de Matemática. Ele consiste de uma base contendo três pilares (hastes), em um dos quais está disposta uma torre formada por alguns discos colocados uns sobre os outros, em ordem crescente de diâmetro, de cima para baixo. O número de discos pode variar.

Esse jogo tem como objetivo deslocar todos os discos de um pilar para outro qualquer, obedecendo a duas regras:

- Mover apenas um disco por vez.
- Um disco com diâmetro maior nunca pode ficar sobre um disco com diâmetro menor.

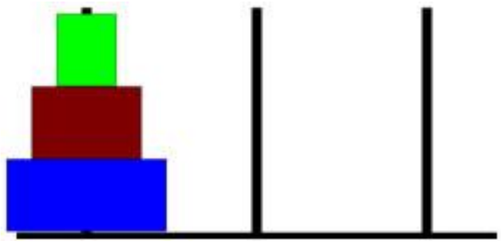
Ele também cria uma situação envolvendo o número mínimo de movimentos necessários através da seguinte expressão matemática: $2^n - 1$, em que n corresponde ao número de discos. Por exemplo:

Três discos = $2^3 - 1 = 8\, movimentos$

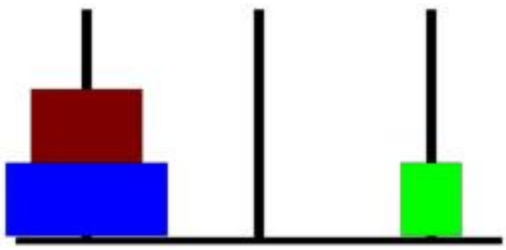
Quatro discos = $2^4 - 1 = 15\, movimentos$

Cinco = $2^5 - 1 = 31\, movimentos$

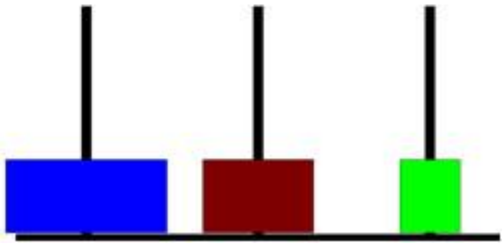
Mínimos movimentos possíveis com três discos:



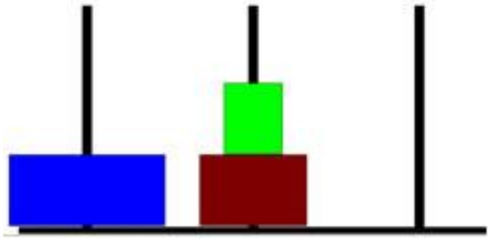
1º movimento



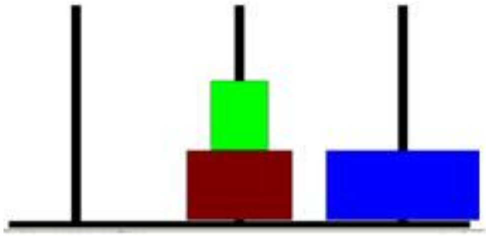
2º movimento



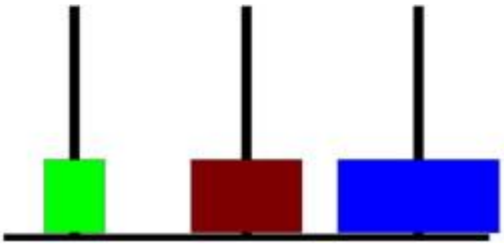
3º movimento



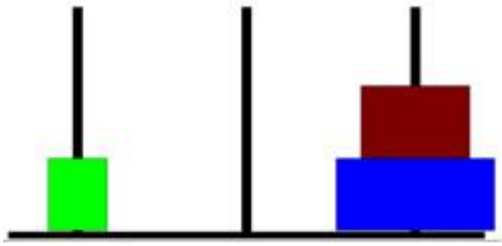
4º movimento



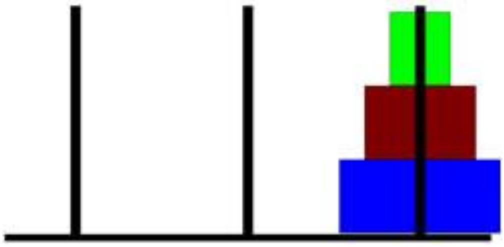
5º movimento



6º movimento



7º movimento



Ganhará a equipe que finalizar mais rápido a montagem a cada rodada. Faremos 3º rodadas, sendo a 1º com três disco, a 2º com quatro disco e a 3º com cinco discos. Algumas regras para definir o(s) ganhador(es):

- A equipe que vencer duas rodadas
- Caso nenhuma equipe complete a 3ª rodada com cinco discos, ganhará quem tiver finalizado primeiro a 2ª rodada.

Jogo: 'Basquete das expressões'.

Teremos duas bolas de basquete no centro da quadra, um membro de cada equipe deve pegar a bola e quicar em direção a cesta e arremessar, assim que o arremesso for convertido, a equipe do jogador que acertou poderá começar resolver uma das expressões. Vence a equipe que terminar de resolver a expressão primeiro, marcando um ponto. Serão feitas quatro rodadas e em caso de empate, faremos uma rodada desempate.

Expressões que serão resolvidas durante os jogos:

$$\mathbf{3x + 9 = 18}$$

Resolução proposta:

$$3x = 18 - 9$$

$$3x = 9$$

$$x = \frac{9}{3}$$

$$x = 3$$

$$\mathbf{5x - 4 = x - 20}$$

Resolução proposta:

$$5x - x = -20 + 4$$

$$4x = -16$$

$$x = \frac{-16}{4}$$

$$x = -4$$

$$\mathbf{8x - 21 = 3}$$

Resolução proposta:

$$8x = 3 + 21$$

$$8x = 24$$

$$x = \frac{24}{8}$$

$$x = 3$$

$$\mathbf{3x - 3 = 3}$$

Resolução proposta:

$$3x = 3 + 3$$

$$3x = 6$$

$$x = \frac{6}{3}$$

$$x = 2$$

$$\mathbf{2x + 1 = 9}$$

Resolução proposta:

$$2x = 9 - 1$$

$$2x = 8$$

$$x = \frac{8}{2}$$

$$x = 4$$

$$\mathbf{4x+5=7}$$

Resolução proposta:

$$4x=7-5$$

$$4x=2$$

$$x=\frac{2}{4}$$

$$\mathbf{2(x-4)=2}$$

Resolução proposta:

$$2x-8=2$$

$$2x=2+8$$

$$2x=10$$

$$x=\frac{10}{2}$$

$$x=5$$

$$\mathbf{4x-3=5}$$

Resolução proposta:

$$4x=5+3$$

$$4x=8$$

$$x=\frac{8}{4}$$

$$x=2$$

$$\mathbf{2x-18=4}$$

Resolução proposta:

$$2x=4+18$$

$$2x=22$$

$$x = \frac{22}{2}$$

$$x = 11$$

$$\mathbf{5x - 24 = 3x}$$

Resolução proposta:

$$5x - 3x = 24$$

$$2x = 24$$

$$x = \frac{24}{2}$$

$$x = 12$$

$$\mathbf{x + 3x = x - 15}$$

Resolução proposta:

$$4x - x = -15$$

$$3x = -15$$

$$x = \frac{-15}{3}$$

$$x = -5$$

$$\mathbf{2(x + 5) = 16}$$

Resolução proposta:

$$2x + 10 = 16$$

$$2x = 16 - 10$$

$$2x = 6$$

$$x = \frac{6}{2}$$

$$x = 3$$

$$\mathbf{8x + 6 = 9 + 3x}$$

Resolução proposta:

$$8x - 3x = 9 - 6$$

$$5x = 3$$

$$x = \frac{3}{5}$$

$$\boldsymbol{x^2 + 8x + 16 = 0}$$

Resolução proposta:

$$(x + 4)^2 = 0$$

$$x = -4$$

$$\boldsymbol{x^2 - 6x + 9 = 0}$$

Resolução proposta:

$$(x - 3)^2 = 0$$

$$x = 3$$

$$\boldsymbol{x^2 - 1 = 0}$$

Resolução proposta:

$$x^2 = 1$$

$$x = \sqrt{1}$$

$$x = 1\ e\ x = -1$$

$$\boldsymbol{2x^2 = 8}$$

Resolução proposta:

$$x^2 = \frac{8}{2}$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \sqrt{4}$$

$$x = 2\ e\ x = -2$$

$$\mathbf{2x^3 = 16}$$

Resolução proposta:

$$x^3 = \frac{16}{2}$$

$$x^3 = 8$$

$$x = 2$$

$$\mathbf{4x = 64}$$

Resolução proposta:

$$x = \frac{64}{4}$$

$$x = 16$$

$$\mathbf{98x = 1960}$$

Resolução proposta:

$$x = \frac{1960}{98}$$

$$x = 20$$

$$\mathbf{10x - 48 = 6x}$$

Resolução proposta:

$$4x = 48$$

$$x = 12$$

$$\mathbf{15x + 13 = 7x + 45}$$

Resolução proposta:

$$8x = 32$$

$$x = 4$$

Jogo: ‘Figuras com Tangram’.

Será pedido para que os grupos formem certas figuras com o tangram através da exposição de sombra das mesmas. O grupo que conseguir o maior número de acertos com menor tempo será o vencedor.

Jogo: ‘Estimando’.

A atividade ocorrerá com seis segmentos, e em todos eles os grupos devem tentar acertar ou aproximar alguma medida. Dentre as estimativas a serem feitas estão:

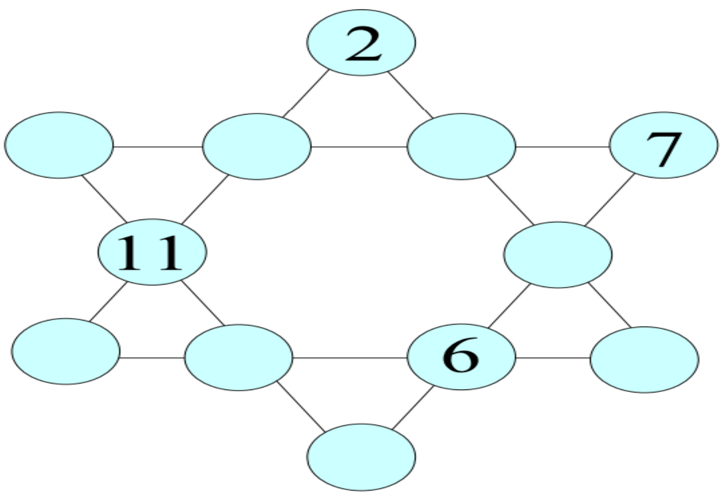
1. O tempo de uma ampulheta;
2. O volume de uma garrafa que será enchida com água;
3. O número de peças do material dourado dentro de uma caixa;
4. Qual é o peso idêntico do dado em relação aos grupos de blocos;
5. A soma de um montante de cédulas;
6. A altura de uma caneta em pé com tampa;
7. O número de clips em uma tampa;
8. A quantidade de peças montáveis em um pote;
9. O número de bolinhas de gude em um pote.

O grupo que obtiver maior precisão nas nove atividades será o vencedor.

Jogo: ‘Estrela 26 e Sodoku’

Os grupos devem completar a estrela de modo que a soma dê 26 em cada linha. No Sodoku é necessário que em cada uma das linhas, das colunas e dos quadrados três por três preenchidos existam um número de um a nove distinto em cada quadrado.

Figura 41 - Estrela 26.



Fonte: Jogos no Ensino Médio – Unesp. Acesso em 08 dez. 2022

Figura 42 - Sodoku.

4	9	7	1	3	8	6	5	2
2	6	3	9	5	4	8	7	1
8	5	1	7	2	6	3	9	4
3	1	9	4	6	7	5	2	8
7	2	6	8	1	5	9	4	3
5	8	4	2	9	3	7	1	6
1	3	5	6	7	2	4	8	9
9	7	8	3	4	1	2	6	5
6	4	2	5	8	9	1	3	7

Fonte: Os autores. Criada em 08 dez. 2023

Figura 43 - Objetos para estatística.

Fonte: Os autores. Criada em 08 dez. 2023

Cada atividade terá o tempo de 20 minutos para ser realizada, e serão distribuídas as seguintes pontuações de acordo com a classificação dos grupos em cada oficina:

1º lugar: cinco pontos

2º lugar: quatro pontos

3° lugar: três pontos

4° lugar: dois pontos

5° lugar: um ponto

No final, o grupo que obtiver a maior pontuação geral será o vencedor da primeira etapa da gincana, e como bônus estará na final da oficina final, enquanto os demais grupos se enfrentarão para conquistarem a outra vaga.

Jogo: 'Torta na cara'

Serão feitas diversas perguntas relacionadas à matemática para dois grupos distintos. Cada resposta correta faz com que um membro da equipe dê uma "tortada" na cara do membro da equipe adversária. Caso ele erre ou não saiba a resposta, ele será quem levará a tortada. O grupo que conseguir obter maior número de acertos será o vencedor.

O grupo vencedor na final desse jogo será o vencedor da gincana.

Avaliação:

Será feita durante o encontro, avaliando participação e desenvoltura dos alunos durante as atividades.

Referências bibliográficas:

NOÉ, Marcos. **Torre de Hanoi**. Disponível em: https://educador.brasilescola.uol.com.br/estrategias-ensino/torre-hanoi.htm. Acesso em: 08 dez. 2022.

BARBOSA, Patrícia Coelho. **Jogo: Torre de Hanoi**: Disponível em: http://clubes.obmep.org.br/blog/torre-de-hanoi/. Acesso em 08 de dez. de 2022.

UNESP. Estrela 26. https://www.ibilce.unesp.br/#!/departamentos/matematica/extensao/lab-mat/jogos-no-ensino-de-matematica/ensino-medio/. Acesso: 09 dez 2022.

14.2. RELATÓRIO DO ENCONTRO X.

Número de alunos: 22 alunos.

Conteúdos desenvolvidos na aula: Gincana.

No encontro X estiveram presentes 22 alunos, visto que a gincana trabalhada nesse encontro contava com a participação de todas as turmas do Promat. Não houveram saídas antecipadas de alunos durante o encontro.

Foram cinco atividades trabalhadas simultaneamente durante a manhã e ficamos responsáveis por duas delas: o ‘Basquete das expressões’ e a ‘Torre de Hanoi’.

No ‘Basquete das expressões’ percebemos participação total dos alunos, todos aparentaram ter gostado da atividade e todos mostraram senso de trabalho em equipe, isto ficava evidente quando dois alunos acertavam a cesta em sequência e iam juntos para a resolução das expressões, os alunos se ajudavam nos cálculos e interagiam bastante para terminarem rápido e poderem voltar para os arremessos.

Nessa dinâmica trabalhamos com expressões simples, mas que requeriam certa atenção, percebemos que os vencedores foram os alunos que tiveram facilidade em realizar os cálculos e não os que tinham melhor desenvoltura jogando basquete, alguns alunos também perceberam isso e começaram a tirar dúvidas conosco sobre algumas expressões mais complexas, como as do segundo grau.

Ainda sobre o ‘Basquete das expressões’ vale destacar como os alunos se empolgavam quando nós os motivávamos. Quando percebíamos uma equipe cansando ou demorando para acertar as cestas ou resolver as expressões, passávamos a gritar pedindo maior velocidade e ajuda dos colegas. Ao final, os alunos comentaram que isso os ajudou e motivou durante a dinâmica.

Na dinâmica da ‘Torre de Hanoi’, todos os grupos tiveram um certo receio e algumas dúvidas quanto ao processo de movimentação das peças e à explicação das regras, visto que alguns não conheciam o jogo. Quando apresentamos os movimentos necessários para concluir a torre com três discos, eles se sentiram confiantes. Informamos que os movimentos que fizemos seriam importantes para a resolução do jogo com um número maior de discos, e que seria vantajoso para eles buscar pelo menor número de movimentos possíveis para, consequentemente, obter um tempo menor a favor.

Todos estiveram concentrados o tempo todo para encontrarem a solução coletivamente. Cada participante do grupo, na sua vez de manusear os discos, tinha a ajuda oral dos demais, ainda que fizessem movimentos errados ou não conseguiam progredir. Nesses momentos em que percebemos que eles se mostravam perdidos, optamos por fazer algumas intervenções, ressaltando sobre como foi solucionado a torre com três discos, qual a sequência de movimentos que foi utilizada e que eles deveriam utilizá-la.

A maioria dos grupos chegaram à torre com sete discos, mas não conseguiram finalizá-las devido ao tempo esgotado para cada estação que o grupo deveria passar. Apenas um grupo conseguiu ir além e finalizar a torre com oito discos em um tempo notável. Quando questionamos ao aluno qual era a lógica que ele utilizou para tal feito, ele nos respondeu que ‘contava’ para qual pino a peça menor a ser removida da torre deveria mover-se e então utilizava os mesmos movimentos sempre, quase de forma automática.

Ao final da dinâmica comentamos com cada grupo sobre para onde a peça menor deveria ser movida de acordo com o número de discos, par ou ímpar. Eles relataram que é um jogo onde a quantidade de discos interfere na dificuldade e que, depois de entenderem/perceberem qual a sequência de movimentos, a torre ficava mais fácil de manusear.

15. CONSIDERAÇÕES FINAIS.

Participar do Promat nos possibilitou um grande aprendizado e experiência enquanto professores em formação. Desenvolver as atividades nos ajudou a melhorar os modos como agimos em sala de aula, pois aprendemos com os nossos acertos e erros.

Nas primeiras aulas, tivemos certa dificuldade em prender a atenção dos alunos, mas com o passar dos encontros, nos conectamos com os alunos e, a prática contínua na função, trouxe maior facilidade e tranquilidade. Ademais, percebemos que aulas mais dinâmicas e interativas, por meio de atividades práticas, trouxeram maior engajamento por parte dos discentes.

Um ponto positivo ao longo do Promat foi a possibilidade de coordenar uma aula a partir de um modelo que imaginávamos ser assertivo, afinal, estamos na mesma posição de nossos alunos, como professores em formação. Sendo assim, entendemos suas dificuldades e desafios, porém percebemos os obstáculos que o professor passa em sala de aula para atrair a atenção de sua turma, pois o processo de preparação execução de uma aula tende a ser trabalhoso e incerto, não surtindo o efeito desejado na maioria das vezes.

Por fim, acreditamos ter proporcionado aos alunos do Promat a revisão dos conteúdos trabalhados através das aulas, do mesmo modo que a experiência como professores nos trouxe. Além disso, para que esse processo de aprendizagem mútua fosse possível, tivemos um amparo de nossa orientadora, que proporcionou maior segurança para prepararmos e ministrarmos os encontros.

16. APÊNDICE.

Anexo I – Cartões com números utilizados no varal numérico

3,5	$-\frac{2}{8}$	1,42	$\frac{3}{2}$	$\frac{18}{4}$
-2,3	0	$-3\frac{3}{4}$	0,825	-15,68
$\frac{5}{9}$	-7	$-\frac{17}{8}$	0,9	$-\frac{7}{18}$

Anexo II – Lista 1 de questões do ENEM

Exercícios do ENEM envolvendo frações, decimais, razão e proporção.

1. (Enem 2017) Em uma cantina, o sucesso de vendas no verão são sucos preparados à base de polpa de frutas. Um dos sucos mais vendidos é o de morango com acerola, que é preparado com 2/3 de polpa de morango e 1/3 de polpa de acerola. Para o comerciante, as polpas são vendidas em embalagens de igual volume. Atualmente, a embalagem da polpa de morango custa R$ 18,00 e a de acerola, R$ 14,70. Porém, está prevista uma alta no preço da embalagem da polpa de acerola no próximo mês, passando a custar R$ 15,30. Para não aumentar o preço do suco, o comerciante negociou com o fornecedor uma redução no preço da embalagem da polpa de morango. A redução, em real, no preço da embalagem da polpa de morango deverá ser de quanto?

2. (Enem 2016 - Adaptada) Até novembro de 2011, não havia uma lei específica que punisse fraude em concursos públicos. Isso dificultava o enquadramento dos fraudadores em algum artigo específico do Código Penal, fazendo com que eles escapassem da Justiça mais facilmente. Entretanto, com o sancionamento da Lei 12.550/11, é considerado crime utilizar ou divulgar indevidamente o conteúdo sigiloso de concurso público, com pena de reclusão de 12 a 48 meses (1 a 4 anos). Caso esse crime seja cometido por um funcionário público, a pena sofrerá um aumento de $\frac{1}{3}$.

Se um funcionário público for condenado por fraudar um concurso público, qual será a variação possível de sua pena?

3. (Enem 2016 - Adaptada) Nas construções prediais são utilizados tubos de diferentes medidas para a instalação da rede de água. Essas medidas são conhecidas pelo seu diâmetro, muitas vezes medido em polegada. Alguns desses tubos, com medidas em polegada, são os tubos de 1/2, 3/8 e 5/4.

Como devemos organizar estas medidas de modo que fiquem em ordem crescente?

4. (Enem 2015) No contexto da matemática recreativa, utilizando diversos materiais didáticos para motivar seus alunos, uma professora organizou um jogo com um tipo de baralho modificado. No início do jogo, vira-se uma carta do baralho na mesa e cada jogador recebe em mãos nove cartas. Deseja-se formar pares de cartas, sendo a primeira carta a da mesa e a segunda, uma carta na mão do jogador, que tenha um valor equivalente àquele descrito na carta da mesa. O objetivo do jogo é verificar qual jogador consegue o maior número de pares. Iniciado o jogo, a carta virada na mesa e as cartas da mão de um jogador são como no esquema:

Segundo as regras do jogo, quantas cartas da mão desse jogador podem formar um par com a carta da mesa?

5. (Enem Digital 2020) É comum as cooperativas venderem seus produtos a diversos estabelecimentos. Uma cooperativa láctea destinou 4 m3 de leite, do total produzido, para análise em um laboratório da região, separados igualmente em 4000 embalagens de mesma capacidade.

Qual o volume de leite, em mililitro, contido em cada embalagem?

a) 0,1 b) 1,0 c) 10,0 d) 100,0 e) 1000,0

6. (Enem 2021 – Adaptada) A fim de reforçar o orçamento familiar, uma dona de casa começou a produzir doces para revender. Cada receita é composta de 4/5 de quilograma de amendoim e 1/5 de quilograma de açúcar. O quilograma de amendoim custa R$ 10,00 e o do açúcar, R$ 2,00. Porém, o açúcar teve um aumento e o quilograma passou a custar R$ 2,20. Para manter o custo com a produção de uma receita, essa dona de casa terá que negociar um desconto com o fornecedor de amendoim.

Nas condições estabelecidas, qual deverá ser o novo valor do quilograma de amendoim?

7. (Enem 2021 – Adaptada) Foi feita uma pesquisa sobre a escolaridade dos funcionários de uma empresa. Verificou-se que 1/4 dos homens que ali trabalham têm o ensino médio completo, enquanto 2/3 das mulheres que trabalham na empresa têm o ensino médio completo. Constatou-se, também, que entre todos os que têm o ensino médio completo, metade são homens.

Qual fração representa o número de funcionários homens em relação ao total de funcionários dessa empresa?

8. (Enem 2014) Boliche é um jogo em que se arremessa uma bola sobre uma pista para atingir dez pinos, dispostos em uma formação de base triangular, buscando derrubar o maior número de pinos. A razão entre o total de vezes em que o jogador derruba todos os pinos e o número de jogadas determina seu desempenho.

Em uma disputa entre cinco jogadores, foram obtidos os seguintes resultados:

- Jogador I – Derrubou todos os pinos 50 vezes em 85 jogadas.
- Jogador II – Derrubou todos os pinos 40 vezes em 65 jogadas.
- Jogador III – Derrubou todos os pinos 20 vezes em 65 jogadas.
- Jogador IV – Derrubou todos os pinos 30 vezes em 40 jogadas.
- Jogador V – Derrubou todos os pinos 48 vezes em 90 jogadas.

Qual desses jogadores apresentou maior desempenho?

9. (Enem 2020) Um pé de eucalipto em idade adequada para o corte rende, em média, 20 mil folhas de papel A4. A densidade superficial do papel A4, medida pela razão da massa de uma folha desse papel por sua área, é de 75 gramas por metro quadrado, e a área de uma folha de A4 é 0,062 metro quadrado.

Disponível em: http://revistagalileu.globo.com. Acesso em: 28 fev. 2013 (adaptado).

Nessas condições, quantos quilogramas de papel rende, em média, um pé de eucalipto?

10. (Enem 2020) Um motociclista planeja realizar uma viagem cujo destino fica a 500 km de sua casa. Sua moto consome 5 litros de gasolina para cada 100 km rodados, e o tanque da moto tem capacidade para 22 litros. Pelo mapa, observou que no trajeto da viagem o último posto disponível para reabastecimento, chamado Estrela, fica a 80 km do seu destino. Ele pretende partir com o tanque da moto cheio e planeja fazer somente duas paradas para reabastecimento, uma na ida e outra na volta, ambas no posto Estrela. No reabastecimento para a viagem de ida, deve considerar também combustível suficiente para se deslocar por 200 km no seu destino.

A quantidade mínima de combustível, em litro, que esse motociclista deve reabastecer no posto Estrela na viagem de ida, que seja suficiente para fazer o segundo reabastecimento, é:

11. (Enem 2020) Um motociclista planeja realizar uma viagem cujo destino fica a 500 km de sua casa. Sua moto consome 5 litros de gasolina para cada 100 km rodados, e o tanque da moto tem capacidade para 22 litros. Pelo mapa, observou que no trajeto da viagem o último posto disponível para reabastecimento, chamado Estrela, fica a 80 km do seu destino. Ele pretende partir com o tanque da moto cheio e planeja fazer somente duas paradas para reabastecimento, uma na ida e outra na volta, ambas no posto Estrela. No reabastecimento para a viagem de ida, deve considerar também combustível suficiente para se deslocar por 200 km no seu destino.

A quantidade mínima de combustível, em litro, que esse motociclista deve reabastecer no posto Estrela na viagem de ida, que seja suficiente para fazer o segundo reabastecimento, é:

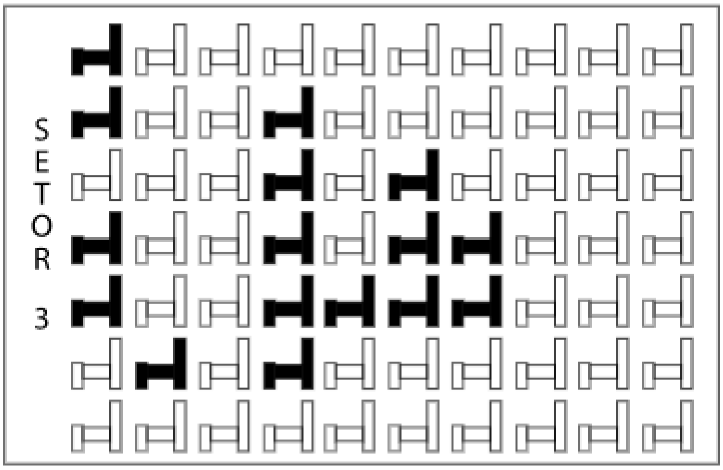
12. (Enem 2020) Um pé de eucalipto em idade adequada para o corte rende, em média, 20 mil folhas de papel A4. A densidade superficial do papel A4, medida pela razão da massa de uma folha desse papel por sua área, é de 75 gramas por metro quadrado, e a área de uma folha de A4 é 0,062 metro quadrado.

Disponível em: http://revistagalileu.globo.com. Acesso em: 28 fev. 2013 (adaptado).

Nessas condições, quantos quilogramas de papel rende, em média, um pé de eucalipto?

13. (Enem PPL 2020 - Adaptada) Com base na Lei Universal da Gravitação, proposta por Isaac Newton, o peso de um objeto na superfície de um planeta aproximadamente esférico é diretamente proporcional à massa do planeta e inversamente proporcional ao quadrado do raio desse planeta. A massa do planeta Mercúrio é, aproximadamente, $\frac{1}{10}$ da massa da Terra e seu raio é, aproximadamente, $\frac{2}{5}$ do raio da Terra. Considere um objeto que, na superfície da Terra, tenha peso P. Qual será o peso desse objeto na superfície de Mercúrio?

14. (Enem 2013) Em um certo teatro, as poltronas são divididas em setores. A figura apresenta a vista do setor 3 desse teatro, no qual as cadeiras escuras estão reservadas e as claras não foram vendidas



A razão que representa a quantidade de cadeiras reservadas do setor 3 em relação ao total de cadeiras desse mesmo setor é:

a) $\frac{17}{70}$

b) $\frac{53}{70}$

c) $\frac{53}{17}$

d) $\frac{70}{17}$

Anexo III - Lista de situações 1

Situações problemas envolvendo frações e números decimais.

1. Sabrina gosta de correr todos os dias por uma pista de 900m. Em um dia ela correu $\frac{2}{3}$ do total da pista e fez uma pausa, depois caminhou mais $\frac{7}{6}$ antes de uma segunda pausa. Responda:

a) Qual a fração que corresponde a distância que ela correu até a segunda pausa?

b) Qual a distância, em metros, que ela correu?

c) Quantos metros ainda faltam para Sabrina completar ida e volta dessa pista?

d) Qual fração representa esse restante em relação ao comprimento da pista?

2. As estações do ano no hemisfério sul são inversas as do hemisfério norte. No Rio de Janeiro, por exemplo, no verão de 2021, a maior temperatura registrada foi de 40,2º C. Na mesma época, em São Petersburgo, na Rússia, a menor temperatura registrada no inverno de 2021 foi de –20,9º C. Qual foi a diferença de temperatura entre essas duas cidades?

3. Um concurso teve 1200 inscritos sendo ofertadas um total de 12 vagas. Qual razão entre o número de vagas em relação ao número de inscritos? Qual a razão do número de inscritos em relação ao número de vagas?

4. Uma rua tem 600 m de comprimento e está sendo asfaltada. Em seis dias foram asfaltados 180 m da rua. Supondo-se que o ritmo de trabalho continue o mesmo, qual o total de dias empreendidos no asfaltamento?

Anexo IV – Lista 2 de questões do ENEM

1. (Enem 2009) Um grupo de 50 pessoas fez um orçamento inicial para organizar uma festa, que seria dividido entre elas em cotas iguais. Verificou-se ao final que, para arcar com todas as despesas, faltavam R$ 510,00, e que 5 novas pessoas haviam ingressado no grupo. No acerto foi decidido que a despesa total seria dividida em partes iguais pelas 55 pessoas. Quem não havia ainda contribuído pagaria a sua parte, e cada uma das 50 pessoas do grupo inicial deveria contribuir com mais R$ 7,00. De acordo com essas informações, qual foi o valor da cota calculada no acerto final para cada uma das 55 pessoas?

2. (ENEM 2021 – Adaptada) Aplicativos que gerenciam serviços de hospedagem têm ganhado espaço no Brasil e no mundo por oferecer opções diferenciadas em termos de localização e valores de hospedagem. Em um desses aplicativos, o preço P a ser pago pela hospedagem é calculado considerando um preço por diária d, acrescido de uma taxa fixa de limpeza L e de uma taxa de serviço. Essa taxa de serviço é um valor percentual s calculado sobre o valor pago pelo total das diárias.

Nessa situação, o preço a ser pago ao aplicativo para uma hospedagem de n diárias pode ser obtido será obtido por qual expressão?

3. (ENEM 2022 Reaplicação – Adaptada) Uma fórmula para calcular o Índice de Massa Corporal (IMC) foi publicada pelo Departamento de Nutrição da Universidade de São Paulo. O estudo propõe uma equação capaz de identificar os falsos magros que, apesar de exibirem uma silhueta esguia, apresentam altos níveis de gordura, e os falsos gordos, que têm um IMC alto em decorrência de ganho de massa muscular, e não de gordura.

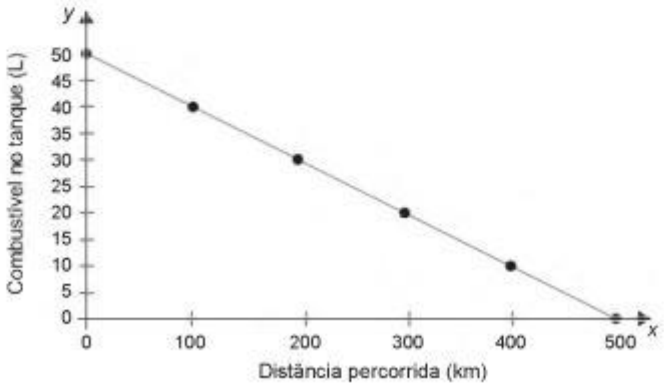
A equação considera a massa do indivíduo, além do peso e da estatura. A fórmula é expressa pela soma do triplo da massa (M), em quilograma, com o quádruplo do percentual de gordura (G), tudo dividido pela altura (H), em centímetro.

Que expressa algébrica representa a nova maneira de calcular o IMC?

4. (ENEM 2021 – Adaptada) Por muitos anos, o Brasil tem figurado no cenário mundial entre os maiores produtores e exportadores de soja. Entre os anos de 2010 e 2014, houve uma forte tendência de aumento da produtividade, porém, um aspecto dificultou esse avanço: o alto custo do imposto ao produtor associado ao baixo preço de venda do produto. Em média, um produtor gastava R$ 1 200,00 por hectare plantado, e vendia por R$ 50,00 cada saca de 60 kg. Ciente desses valores, um produtor pode, em certo ano, determinar uma relação do lucro L que obteve em função das sacas de 60 kg vendidas. Suponha que ele plantou 10 hectares de soja em sua propriedade, na qual colheu x sacas de 60 kg e todas as sacas foram vendidas.

Qual é a expressão que determinou o lucro *L* em função de x obtido por esse produtor nesse ano?

5. (ENEM 2018 – Adaptada) Uma indústria automobilística está testando um novo modelo de carro. Cinquenta litros de combustível são colocados no tanque desse carro, que é dirigido em uma pista de testes até que todo o combustível tenha sido consumido. O segmento de reta no gráfico mostra o resultado desse teste, no qual a quantidade de combustível no tanque é indicada no eixo *y* (vertical), e a distância percorrida pelo automóvel é indicada no eixo *x* (horizontal).



Qual é a expressão algébrica que relaciona a quantidade de combustível no tanque e a distância percorrida pelo automóvel?

6. (ENEM 2010 - Adaptada) Lucas precisa estacionar o carro pelo período de 40 minutos, e sua irmã Clara também precisa estacionar o carro pelo período de 6 horas. O estacionamento Verde cobra R$ 5,00 por hora de permanência. O estacionamento Amarelo cobra R$ 6,00 por 4 horas de permanência e mais R$ 2,50 por hora ou fração de hora ultrapassada. O estacionamento Preto cobra R$ 7,00 por 3 horas de permanência e mais R$ 1,00 por hora ou fração de hora ultrapassada. Qual o estacionamento mais econômico para Lucas? E para Clara?

7. (ENEM 2010 - Adaptada) Em fevereiro, o governo da Cidade do México, metrópole com uma das maiores frotas de automóveis do mundo, passou a oferecer à população bicicletas como opção de transporte. Por uma anuidade de 24 dólares, os usuários têm direito a 30 minutos de uso livre por dia. O ciclista pode retirar em uma estação e devolver em qualquer outra e, se quiser estender a pedalada, paga 3 dólares por hora extra.

Qual é a expressão que relaciona o valor f pago pela utilização da bicicleta por um ano, quando se utilizam x horas extras nesse período?

8. (ENEM 2012 - Adaptada) O governo de um país criou o Fundo da Soja e do Milho, que tem como expectativa inicial arrecadar, por ano, R$ 36,14 milhões para investimento em pesquisas relacionadas aos principais produtos da agricultura. Com isso, a cada operação de venda, seriam destinados ao Fundo R$ 0,28 por tonelada de soja e R$ 0,22 por tonelada de milho comercializadas. Para este ano, espera-se que as quantidades de toneladas produzidas, de soja e de milho, juntas, seja 150,5 milhões.

Foi pedido a cinco funcionários do Fundo, André, Bruno, Caio, Douglas e Eduardo, que apresentassem um sistema que modelasse os dados apresentados. Cada funcionário apresentou um sistema diferente, considerando x e y como as quantidades de toneladas comercializadas, respectivamente, de soja e de milho. O resultado foi o seguinte:

André $\begin{cases} x + y = 150\,500\,000 \\ 0{,}28x + 0{,}22y = 36\,140\,000 \end{cases}$

Bruno $\begin{cases} 100\,000\,000x + 100\,000\,000y = 150{,}5 \\ 0{,}28x + 0{,}22y = 36\,140\,000 \end{cases}$

Caio $\begin{cases} x + y = 150{,}5 \\ 0{,}28x + 0{,}22y = 36\,140\,000 \end{cases}$

Douglas $\begin{cases} x + y = 150{,}5 \\ 0{,}28x + 0{,}22y = 36{,}14 \end{cases}$

Eduardo $\begin{cases} x + y = 150\,500\,000 \\ 0{,}28x + 0{,}22y = 36{,}14 \end{cases}$

Algum funcionário fez a modelagem correta? Se sim, qual?

Anexo V – Lista de situações problema 2

Situações problemas envolvendo funções e equações do primeiro grau.

1. Um comerciante registrou na tabela seus gastos na compra de latas de palmito e azeitona, durante uma semana.

Dia da semana	Latas de palmito	Latas de azeitona	Valor total
segunda-feira	1	7	R$ 34,00
terça-feira	5	3	R$ 42,00
quarta-feira	2	9	?

Os preços permaneceram constantes durante essa semana. Qual foi o valor que o comerciante anotará na sexta-feira?

2. “Eu e minha filha fazemos aniversário hoje, e no dia de hoje, a minha idade é o triplo da dela. Daqui a dois anos a soma de nossas idades será 56 anos. Quando minha filha nasceu, quantos anos eu tinha?”

3. Em um estacionamento, há carros e motos, totalizando 14 veículos e 48 rodas. Quantos carros e quantas motos há nesse estacionamento?

Anexo VI – Cartela do Bingo das Funções

Figura 44 - Cartela bingo das funções

BINGO DAS FUNÇÕES Y=2X+X-1		
53	5	44
59	2	38
11	23	29

Fonte: os autores. Criado em: 10 out. de 2022

Anexo VI – Definições e situações-problema envolvendo funções afim.

Função Afim:

Função Linear:

Função Constante:

Problemas:

1. O salário de um vendedor é composto de uma parte fixa no valor de R$ 800,00, mais uma parte variável de 12% sobre o valor de suas vendas no mês. Caso ele consiga vender R$ 450,00, calcule o valor de seu salário.

2. Uma pessoa vai escolher um plano de saúde entre duas opções: A e B.

Abaixo estão as condições dos planos:

- Plano A: cobra um valor fixo mensal de R$ 140,00 e R$ 20,00 por consulta num certo período.
- Plano B: cobra um valor fixo mensal de R$ 110,00 e R$ 25,00 por consulta num certo período.

Temos que o gasto total de cada plano é dado em função do número de consultas x dentro do período preestabelecido.

a) Determine a função correspondente a cada plano.

b) Em qual situação o plano A é mais econômico? E o plano B? Quando os dois se equivalem?

c) Construa o gráfico das funções para verificar a resposta anterior.

3. Uma muda de árvore é plantada medindo 30 cm de altura. Todo ano ela cresce, em média, 50 cm, e se estabiliza quando atinge 4,5 m. Considerando os dados:

a) Encontre a função que descreve o crescimento da árvore.

b) Em quantos anos a árvore se estabilizará?

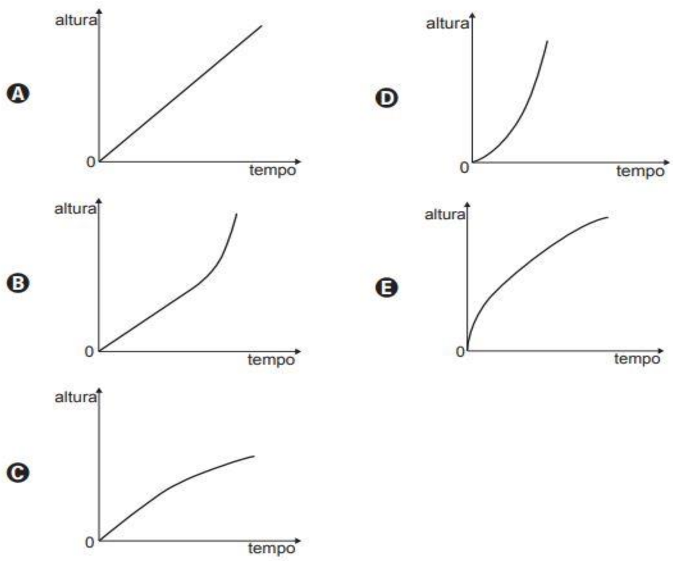
c) Construa o gráfico que corresponde ao crescimento da árvore.

4. João quer fazer uma viagem até a casa de sua mãe para fazer-lhe uma visita. A distância entre a casa de João e a da sua mãe é de 42 km. Ele decide, então, pedir um táxi. Ao final da viagem, o taxista informou que o preço da viagem era de R$ 52,80. Sabendo que o taxista cobra R$ 1,15 por quilômetro rodado, descubra qual a taxa fixa, conhecida como 'bandeirada', que ele cobra por viagem.

Anexo VII – Questões do ENEM envolvendo funções afim.

1. (ENEM 2021) O consumo de espumantes no Brasil tem aumentado nos últimos anos. Uma das etapas do seu processo de produção consiste no envasamento da bebida em garrafas semelhantes às da imagem. Nesse processo, a vazão do líquido no interior da garrafa é constante e cessa quando atinge o nível de envasamento.

Qual esboço de gráfico melhor representa a variação da altura do líquido em função do tempo, na garrafa indicada na imagem?

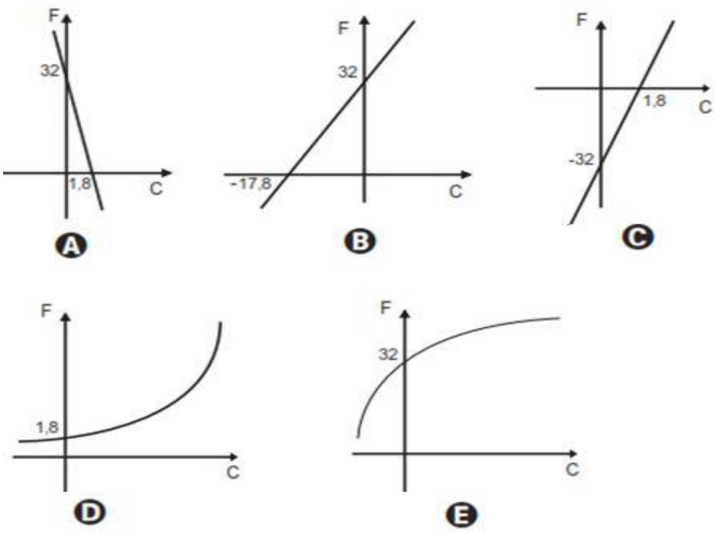


2. (ENEM 2011) De acordo com os números divulgados pela Agência Nacional de Telecomunicações (Anatel), já há no país 91 celulares em cada grupo de 100 pessoas. Entre as várias operadoras existentes, uma propõe o seguinte plano aos seus clientes: R$ 25,00 mensais para até 40 minutos de conversação mensal e R$ 1,00 por minuto que exceda o tempo estipulado.

Qual dos gráficos a seguir corresponde aos possíveis gastos mensais (y), em reais, de um cliente dessa operadora de celular, em função do tempo (x) utilizado, em minutos?

3. (ENEM 2011) No Brasil, costumamos medir temperaturas utilizando a escala Celsius. Os países de língua inglesa utilizam a escala Farenheit. A relação entre essas duas escalas é dada pela expressão F = C x 1,8 + 32, em que F representa a medida da temperatura na escala Farenheit e C a medida da temperatura na escala Celsius.

O gráfico que representa a relação entre essas duas grandezas é



4. (ENEM 2011 - Adaptada) As fábricas de pneus utilizam-se de modelos matemáticos próprios em sua produção, para a adaptação dos vários tipos de pneus aos veículos: de bicicletas a caminhões, tratores e aviões. Um dos conceitos utilizados pela indústria é o de "índice de carga", que está relacionado à carga máxima que pode ser suportada por um pneu. Uma empresa fabricante de pneus apresenta o seguinte quadro, relativo às cargas máximas suportadas por pneus cujos índices variam de 70 a 80. Há um comportamento regular em alguns intervalos, como se observa entre os índices de 70 a 74.

ÍNDICE DE CARGA	CARGA MÁXIMA (kg)
70	335
71	345
72	355
73	365
74	375
75	387
76	400
77	412
78	425
79	437
80	450

Disponível em: http://www.goodyear.com.br. Acesso em: 27 abr. 2010 (adaptado).

Qual equação representa a dependência entre o índice de carga (*I*) e a carga máxima (*C*), em kg, no intervalo de 70 a 74?

5. (ENEM 2014 - Adaptada) Os sistemas de cobrança dos serviços de táxi nas cidades A e B são distintos. Uma corrida de táxi na cidade A é calculada pelo valor fixo da bandeirada, que é de R$ 3,45, mais R$ 2,05 por quilômetro rodado. Na cidade B, a corrida é calculada pelo valor fixo da bandeirada, que é de R$ 3,60, mais R$ 1,90 por quilômetro rodado.
Uma pessoa utilizou o serviço de táxi nas duas cidades para percorrer a mesma distância de 6 km.

Qual o valor que mais se aproxima da diferença, em reais, entre as médias do custo por quilômetro rodado ao final das duas corridas?

Anexo VIII – Definições e situações-problema envolvendo funções quadráticas.

Função polinomial do segundo grau

Chama-se função quadrática ou função polinomial do 2º grau, qualquer função $f\colon \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$dada por uma lei da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que a, b e c são números reais e $a \neq 0$.

Obs.: Se o coeficiente a for igual a zero ($a = 0$), consequentemente teremos $ax^2 = 0$, logo encontraremos a seguinte função:$f(x) = bx + c$, que é uma função afim.

Raízes da Equação do Segundo Grau:

Chamam-se raízes ou zeros da função polinomial do 2º grau, dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, os números reais x tais que $f(x) = 0$.

Raízes por Soma e Produto:

Sendo x' e x'' as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, encontraremos as raízes por:

$$x' + x'' = -\frac{b}{a}$$

$$x' \cdot x'' = \frac{c}{a}$$

Vértice da Parábola:

Quando $a > 0$, a parábola tem concavidade volta para cima, então teremos um ponto de mínimo de V;

Quando $a < 0$, a parábola tem concavidade volta para cima, então teremos um ponto de máximo de V;

As coordenadas de V são:

$$V = (-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$$

Sendo $V_X = -\frac{b}{2a}$ e $V_y = -\frac{\Delta}{4a}$

1. Determinado fazendeiro pretende construir uma cerca em formato retangular utilizando 60 metros lineares de cerca. Quais medidas desse retângulo irão tornar a área cercada maior possível?

a) Escreva a função que mostra a área do cercado A(x) variando de acordo com a medida do comprimento de um dos seus lados x.

b) A partir da função encontrada, complete a tabela com valores para os lados do cercado e respectivas áreas. Para cada situação, construa com o barbante o resultado equivalente.

x		A(x)
comprimento (m)	**largura (m)**	**Área (m²)**

c) Desenhe o gráfico da função encontrada na questão 1. Utilize os pares ordenados encontrados na questão 2. Utilize também as raízes da função.

d) Determine o ponto de máximo da função.

e) Qual o valor para x que torna a área máxima? Discuta sobre o resultado.

2. Uma pedra é lançada do solo verticalmente para cima. Ao fim de t segundos, atinge a altura h, dada por:

$$h(t) = 40t - 5t^2$$

a) Calcule a posição da pedra no instante 2 s.

b) Calcule o instante em que a pedra passa pela posição 75 m, durante a subida e descida.

c) Determine a altura máxima que a pedra atinge e o instante em que isso acontece.

d) Construa o gráfico da função h para $0 \leq t \leq 8$.

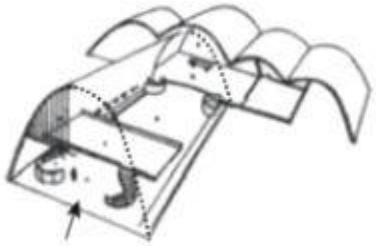
3. O dono de uma marcenaria, que fabrica um certo tipo de armário, sabe que o número de armários N que ele pode fabricar por mês depende do número x de funcionários trabalhando na marcenaria, e essa dependência é dada pela função:

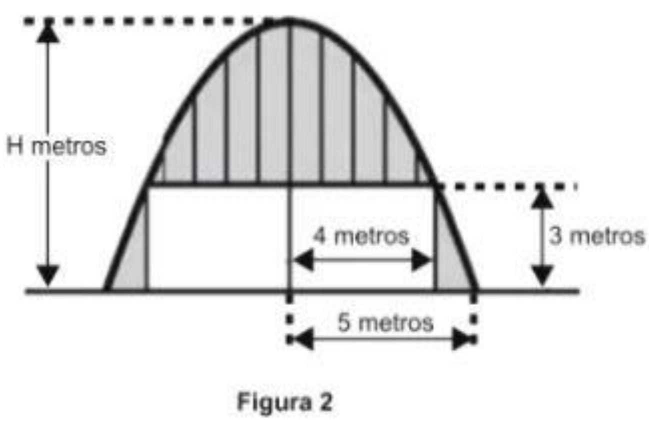
$$N(x) = x^2 + 2x$$

Qual é o número de empregados necessários para fabricar 168 armários em um mês?

Anexo IX – Questões do ENEM envolvendo funções quadráticas

1. (ENEM 2017) A igreja de São Francisco de Assis, obra arquitetônica modernista de Oscar Niemeyer, localizada na Lagoa da Pampulha, em Belo Horizonte, possui abóbadas parabólicas. A seta na Figura 1 ilustra uma das abóbadas na entrada principal da capela. A figura 2 fornece uma vista frontal desta abóbada, com medidas hipotéticas para simplificar os cálculos.





Qual a medida da altura H, em metro, indicada na Figura 2?

a) 16/3 b) 31/5 c) 25/4 d) 25/3 e) 75/2

2. (ENEM 2021) Uma empresa de chocolates consultou o gerente de produção e verificou que existem cinco tipos diferentes de barras de chocolate que podem ser produzidas, com os seguintes preços no mercado:

• Barra I: R$ 2,00;

• Barra II: R$ 3,50;

• Barra III: R$ 4,00;

• Barra IV: R$ 7,00;

• Barra V: R$ 8,00.

Analisando as tendências do mercado, que incluem a quantidade vendida e a procura pelos consumidores, o gerente de vendas da empresa verificou que o lucro L com a venda de barras de chocolate é expresso pela função $L(x) = -x^2 + 14x - 45$, em que x representa o preço da barra de chocolate.

A empresa decide investir na fabricação da barra de chocolate cujo preço praticado no mercado renderá o maior lucro.

Nessas condições, a empresa deverá investir na produção da barra:

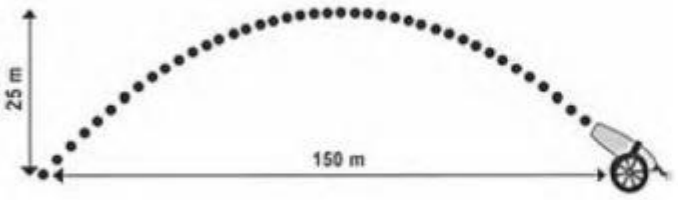
a) I b) II c) III d) IV e) V

3. (ENEM 2020) Em um ano, uma prefeitura apresentou o relatório de gastos públicos realizados pelo município. O documento mostra que foram gastos 72 mil reais no mês de janeiro (mês 1), que o maior gasto mensal ocorreu no mês de agosto (mês 8) e que a prefeitura gastou 105 mil reais no mês de dezembro (mês 12). A curva que modela esses gastos é a parábola y = T(x), com x sendo o número correspondente ao mês e T(x), em milhar de real.

A expressão da função cujo gráfico é o da parábola descrita

a) $T(x) = -x^2 + 16x + 57$
b) $T(x) = -(11/16)x^2 + 11x + 72$
c) $T(x) = (3/5)x^2 – (24/5)x + 381/5$
d) $T(x) = – x^2 – 16x + 87$
e) $T(x) = (11/16)x^2 – (11/2)x + 72$

4. (ENEM 2018) Um projétil é lançado por um canhão e atinge o solo a uma distância de 150 metros do ponto de partida. Ele percorre uma trajetória parabólica, e a altura máxima que atinge em relação ao solo é de 25 metros.



Admita um sistema de coordenadas xy em que no eixo vertical y está representada a altura e no eixo horizontal x está representada a distância, ambas em metro. Considere que o canhão está no ponto (150; 0) e que o projétil atinge o solo no ponto (0; 0) do plano xy.

A equação da parábola que representa a trajetória descrita pelo projétil é

A) $y = 150x – x^2$

B) $y = 3\,750x – 25x^2$

C) $75y = 300x – 2x^2$

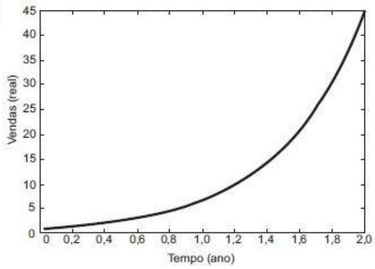
D) $125y = 450x – 3x^2$

E) $225y = 150x – x^2$

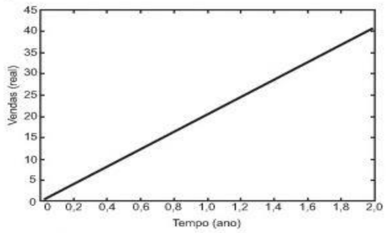
5. (ENEM 2017) Ao abrir um negócio, um microempresário descreveu suas vendas, em milhares de reais (unidade monetária brasileira), durante os dois primeiros anos. No primeiro ano, suas vendas cresceram de modo linear. Posteriormente, ele decidiu investir em propaganda, o que fez suas vendas crescerem de modo exponencial.

Qual é o gráfico que melhor descreve as vendas em função do tempo?

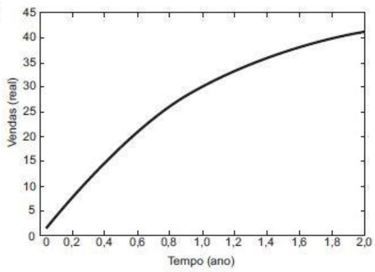
A)



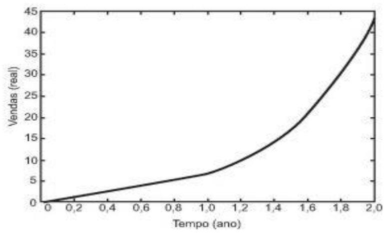
C)



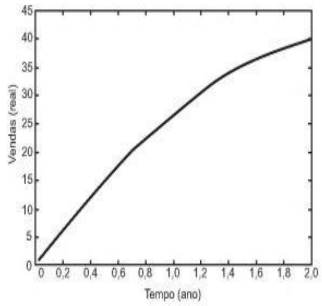
B)



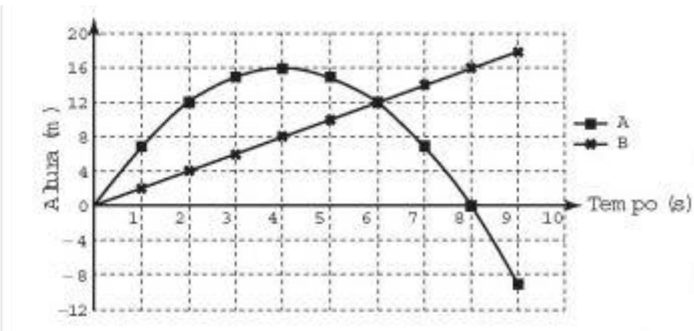
D)



E)



6. (ENEM 2016) Para uma feira de ciências, dois projéteis de foguetes, A e B, estão sendo construídos para serem lançados. O planejamento é que eles sejam lançados juntos, com o objetivo de o projétil B interceptar o A quando esse alcançar sua altura máxima. Para que isso aconteça, um dos projéteis descreverá uma trajetória parabólica, enquanto o outro irá descrever uma trajetória supostamente retilínea. O gráfico mostra as alturas alcançadas por esses projéteis em função do tempo, nas simulações realizadas.



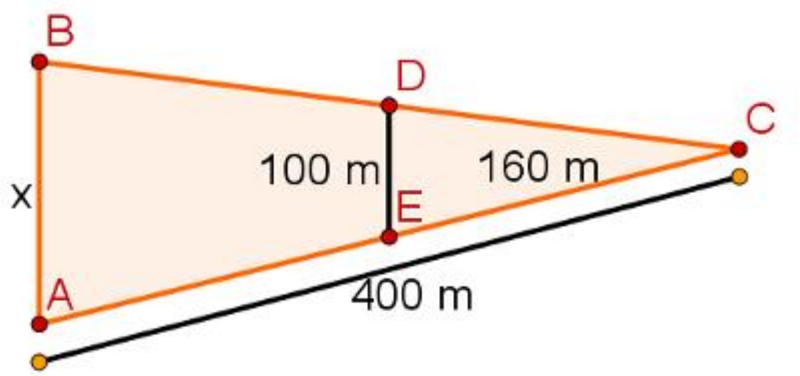
Com base nessas simulações, observou-se que a trajetória do projétil B deveria ser alterada para que o objetivo fosse alcançado.

Para alcançar o objetivo, o coeficiente angular da reta que representa a trajetória de B deverá

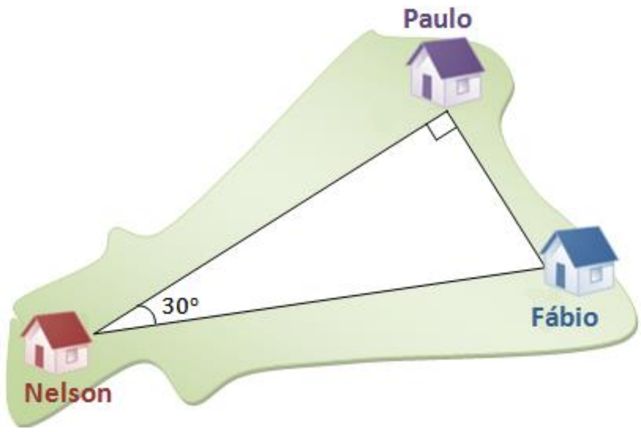
a) diminuir em duas unidades
b) diminuir em quatro unidades
c) aumentar em duas unidades
d) aumentar em quatro unidades
e) aumentar em oito unidades

Anexo X – Situações-problema envolvendo Geometria do triângulo.

1. Na imagem a seguir, é possível perceber dois triângulos que compartilham parte de dois lados. Sabendo que os segmentos BA e DE são paralelos, qual a medida de x?

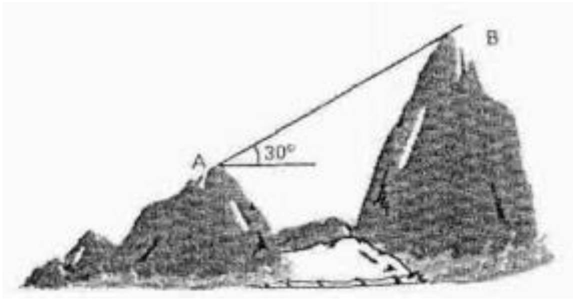


2. A figura mostra a disposição das casas de três amigos: Paulo, Nelson e Fábio.

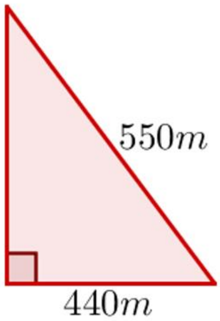


Calcule, em metros, o comprimento de fio telefônico necessário para ligar a casa da chácara de Fábio à casa da chácara de Nelson, sabendo-se que foram gastos 800 m de fio para ligar a casa de Paulo à casa de Fábio.

3. As alturas (em relação ao nível do mar) em que estão dois pontos A e B são, respectivamente, 812 m e 1020 m. Do ponto A vê-se o ponto B sob um ângulo de 30° com o plano horizontal, conforme a figura. Determinar a distância entre os pontos A e B.

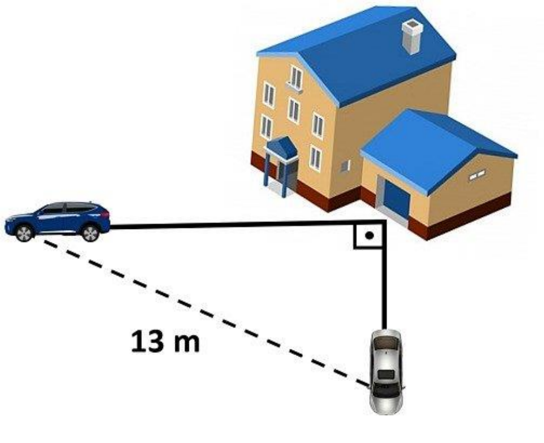


4. Deseja-se cercar uma mata, onde será criada uma área de preservação ambiental, com forma triangular. Para tanto, foi feito um mapa com as seguintes anotações:



Sabendo que a cerca custará, por metro, R$ 32,00, quanto será gasto para construí-la?

5. Carlos e Ana saíram de casa para trabalhar partindo do mesmo ponto, a garagem do prédio onde moram. Após 1 min, percorrendo um trajeto perpendicular, eles estavam a 13 m de distância um do outro.



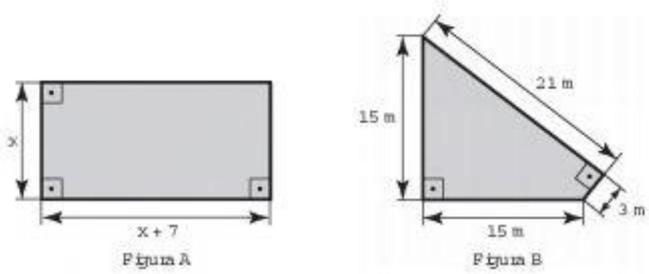
Se o carro de Carlos fez 7m a mais que o de Ana durante esse tempo, a que distância eles estavam da garagem?

Anexo XI – Questões de vestibular envolvendo Geometria do triângulo.

1. (ENEM 2018) Um quebra-cabeça consiste em recobrir um quadrado com triângulos retângulos isósceles, como ilustra a figura.

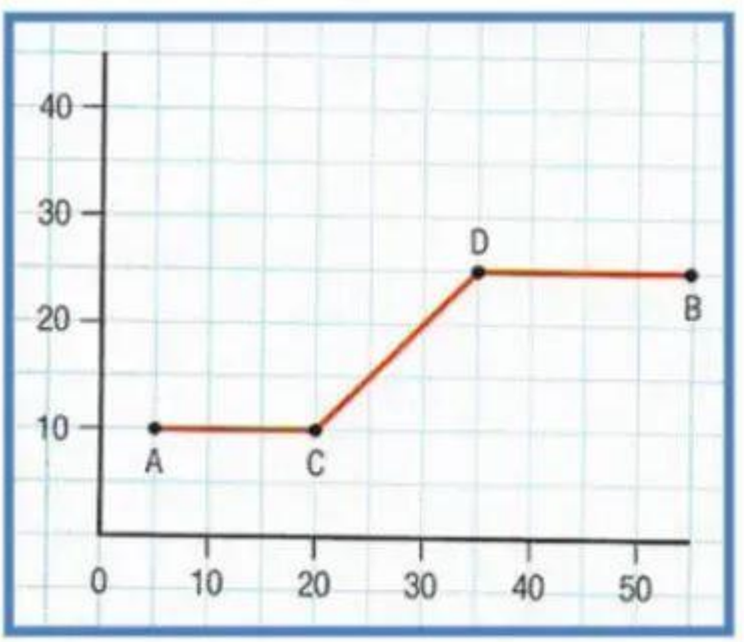
Uma artesã confecciona um quebra-cabeça como o descrito, de tal modo que a menor das peças é um triângulo retângulo isósceles cujos catetos medem 2 cm.
O quebra-cabeça, quando montado, resultará em um quadrado cuja medida do lado, em centímetro, é
a) 14 b)12 c) $7\sqrt{2}$ d) $6+4\sqrt{2}$ e) $6+2\sqrt{2}$

2. (ENEM 2016) Um senhor, pai de dois filhos, deseja comprar dois terrenos, com áreas de mesma medida, um para cada filho. Um dos terrenos visitados já está demarcado e, embora não tenha um formato convencional (como se observa na Figura B), agradou ao filho mais velho e, por isso, foi comprado. O filho mais novo possui um projeto arquitetônico de uma casa que quer construir, mas, para isso, precisa de um terreno na forma retangular (como mostrado na Figura A) cujo comprimento seja 7 m maior do que a largura.



Para satisfazer o filho mais novo, esse senhor precisa encontrar um terreno retangular cujas medidas, em metro, do comprimento e da largura sejam iguais, respectivamente, a
a) 7,5 e 14,5. b) 9,0 e 16,0. c) 9,3 e 16,3. d) 10,0 e 17,0. e) 13,5 e 20,5.

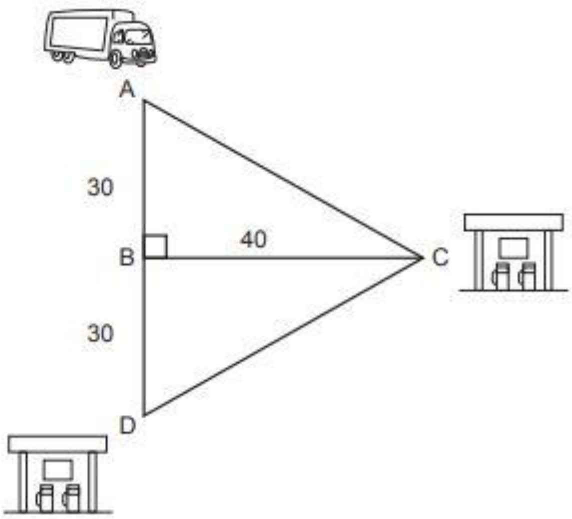
3. (IFSP) O transporte alternativo é uma maneira de locomover-se usando um meio diferente dos mais tradicionais. A bicicleta é um exemplo disso. Em alguns lugares, ela é usada porque é mais barata, como no interior do Brasil e em países como a Índia e China. Outras pessoas escolhem andar de bicicleta por uma questão ideológica, porque elas não agridem o meio ambiente e não causam tantos transtornos quanto os carros. Usando uma bicicleta, uma pessoa sai do ponto A e dirige-se ao ponto B. O percurso, dado em km, representado pelos segmentos AC, CD e DB está esboçado no gráfico abaixo.



Considerando $\sqrt{2} = 1{,}4$ assinale a alternativa que apresenta a distância percorrida pela pessoa do ponto A ao ponto B.

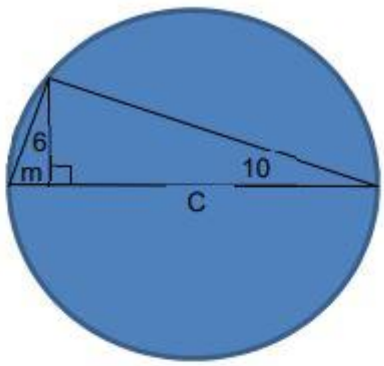
a) 56 km b) 21 km c) 20 km d)15 km e)10 km

4. (ENCCEJA 2018) Um caminhoneiro viajando pelo interior de seu país chega à cidade A. No tanque de combustível do seu veículo restam somente 10 litros. Seu destino final é a cidade D e as distâncias entre cada uma das cidades A, B, C e D são as indicadas na figura. Somente existem postos de abastecimento nas cidades C e D. O veículo consegue percorrer 5 quilômetros (km) com um litro de combustível.



a) ABD e 60km b) ACD e 100km c) ABCD e 120km d) ACBD e 140km

5. (IFAL 2016) Calcule o valor de m na figura:

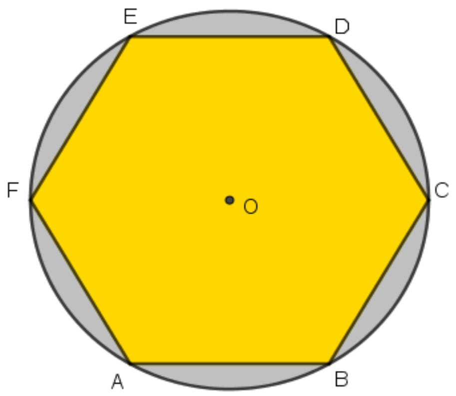


Onde C é o centro do círculo de raio 10.

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

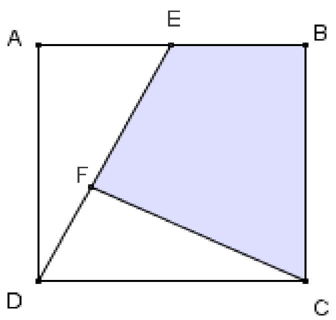
Anexo XII – Situações-problema envolvendo geometria plana e espacial.

1. Na figura, o hexágono regular ABCDEF está inscrito no círculo de centro O.



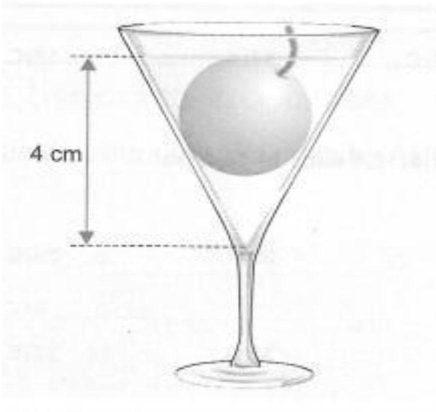
Se a distância entre os vértices A e B é 4cm, qual a área do quadrilátero ABOF?

2. Na figura abaixo, temos um quadrado ABCD de lado 2 cm; E é o ponto médio do segmento AB e F é um ponto entre E e D.



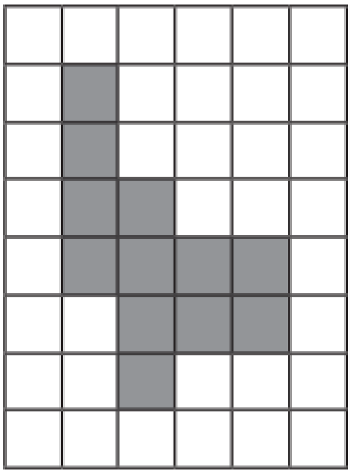
Se os segmentos CF e DE são perpendiculares, determine a área do quadrilátero BCFE.

3. Um cálice com a forma de um cone mantém V cm³ de uma bebida. Uma cereja de forma esférica, com diâmetro 2 cm, é colocada dentro do cálice, supondo que a cereja repousa apoiada nas laterais do cálice, e o líquido recobre exatamente a cereja a uma altura de 4 cm a partir do vértice do cone, determine o valor de V.



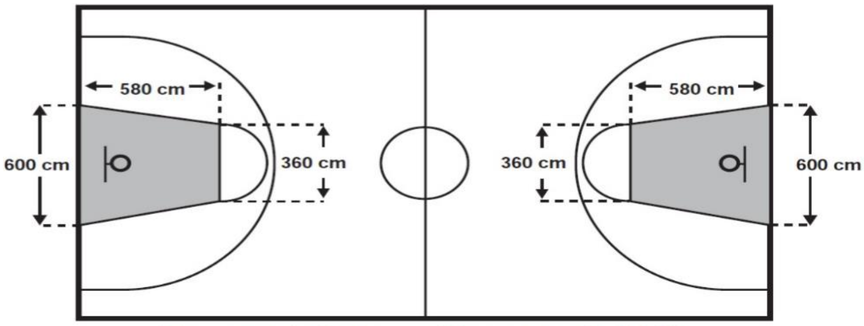
Anexo XIII – Questões de vestibular sobre geometria plana e espacial.

1. (**Enem – PP - Adaptada**) na zona rural, a utilização de unidades de medida como o hectare é bastante comum. O hectare equivale à área de um quadrado de lado igual a 100 metros. Na figura, há a representação de um terreno por meio da área em destaque. Nesta figura, cada quadrado que compõe esta malha representa uma área de 1 hectare.



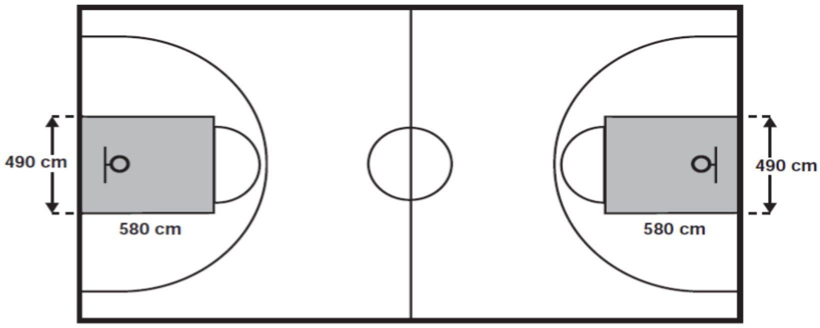
O terreno em destaque foi comercializado pelo valor R$ 3.600.000. O valor do metro quadrado desse terreno foi de?

2. (Enem 2015 – Adaptada) O Esquema I mostra a configuração de uma quadra de basquete. Os trapézios em cinza, chamados de garrafões, correspondem a áreas restritivas.



Esquema I: área restritiva antes de 2010

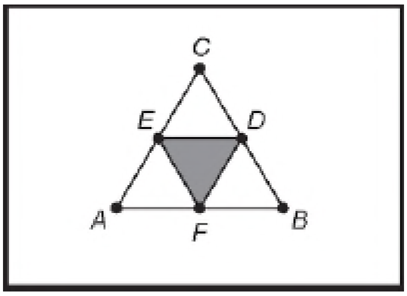
Visando a atender as orientações do Comitê Central da Federação Internacional de Basquete (Fiba) em 2010, que unificaram as marcações das diversas ligas, foi prevista uma modificação nos garrafões das quadras, que passariam a ser retângulos, como mostra o Esquema II.



Esquema II: área restritiva a partir de 2010

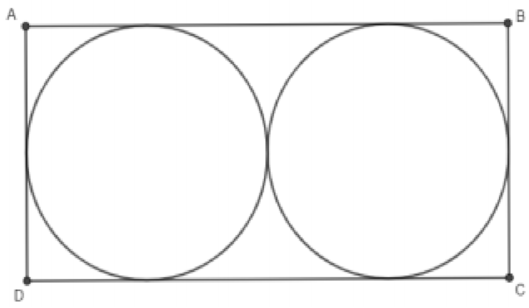
Após executadas as modificações previstas, houve uma alteração na área ocupada por cada garrafão, que corresponde a um aumento ou diminuição? Qual o valor em cm^2 do aumento ou diminuição?

3. (Enem 2014 – Adaptada) Um artista deseja pintar em um quadro uma figura na forma de triângulo equilátero ABC de lado 1 metro. Com o objetivo de dar um efeito diferente em sua obra, o artista traça segmentos que unem os pontos médios D, E e F dos lados BC, AC e AB, respectivamente, colorindo um dos quatro triângulos menores, como mostra a figura.



Qual é a medida da área pintada, em metros quadrados, do triângulo DEF?

4. (Omini 2021 - adaptada) Wilson tem um terreno retangular e desejando plantar uma horta, colocou dois irrigadores nesse terreno, ambos com alcance circular de raio igual a 4 metros, como na figura abaixo.



A área que os irrigadores não alcançam será uma parte do terreno em que Wilson não fará a horta. Qual o valor dessa área? Utilize π = 3,14.

5. (ENEM 2021) Um povoado com 100 habitantes está passando por uma situação de seca prolongada e os responsáveis pela administração pública local decidem contratar a construção de um reservatório. Ele deverá ter a forma de um cilindro circular reto, cuja base tenha 5 metros de diâmetro interno, e atender à demanda de água da população por um período de exatamente sete dias consecutivos. No oitavo dia, o reservatório vazio é completamente reabastecido por carros-pipa. Considere que o consumo médio diário por habitante é de 120 litros de água. Use 3 como aproximação para π.

Nas condições apresentadas, o reservatório deverá ser construído com uma altura interna mínima, em metro, igual a

a) 1,12 b) 3,10 c) 4,35 d) 4,48 e) 5,60

6. (ENEM 2021) Um piscicultor cria uma espécie de peixe em um tanque cilíndrico. Devido às características dessa espécie, o tanque deve ter, exatamente,2 metros de profundidade e ser dimensionado de forma a comportar 5 peixes para cada metro cúbico de água. Atualmente, o tanque comporta um total de 750 peixes. O piscicultor deseja aumentara capacidade do tanque para que ele comporte900 peixes, mas sem alterar a sua profundidade. Considere 3 como aproximação para π.

O aumento da medida do raio do tanque, em metro, deve ser de

a) $\sqrt{30}$-5 b) $\frac{\sqrt{30}-5}{2}$ c) $\sqrt{5}$ d) $\frac{5}{2}$ e) $\frac{15}{2}$

Anexo XIV – Conceitos e definições

Investimentos preferidos pelos brasileiros (em %):	
Poupança	69.50%
Imóveis	28.80%
Previdência privada	8.90%
Fundos de investimento	5.90%
Dólar	5.50%
CDB (Certificado de depósito bancário)	1.80%
Tesouro direto	1.60%
LCI (Letras de crédito imobiliário)	0.80%
Bolsa de valores	0.40%

Renda fixa:

Tipos de investimento em renda fixa:

Quais são os tipos de renda fixa?

Poupança: É a aplicação mais popular do país. É fácil de aplicar, sacar e não paga Imposto de Renda. O rendimento é mensal, sendo atualizado sempre na data de abertura.

Tesouro Direto (títulos do governo): Nessa aplicação o emissor é o governo federal. Há títulos prefixados, como o Tesouro Prefixado, e títulos pós-fixados, como o Tesouro Selic ou o Tesouro IPCA+.

CDBs e RDBs: São exemplos de aplicações de renda fixa em títulos de bancos.

Debêntures e Notas Promissórias: são exemplos de aplicações em títulos de renda fixa de empresas.

LCIs e LCAs: Também é como emprestar dinheiro para o banco em troca de uma taxa de juros (o rendimento do título).

Fundos de investimento: É possível aplicar em renda fixa por meio de fundos de investimento. Da mesma forma que os ativos de renda fixa se dividem em prefixados e pós-fixados, os fundos de investimento renda fixa também se dividem nessas duas categorias.

Renda variável

Anexo XV – Questões de vestibular matemática financeira.

1. Uma dívida de R\$ R\$ 1.000,00 foi paga com atraso de um ano e meio. No acerto, foi cobrada uma multa de R\$ 100,00, mais juro de 1% ao mês em cima do valor inicial da dívida. Nessas condições, o valor pago por essa dívida foi de:

2. (Enem 2011 - Adaptada) um jovem investidor precisa escolher qual investimento lhe trará maior retorno financeiro em uma aplicação de R\$ 500,00. Para isso, pesquisa o rendimento e o imposto a ser pago em dois investimentos: poupança e CDB (certificado de depósito bancário). As informações obtidas estão resumidas no quadro:

	Rendimento mensal (%)	IR (imposto de renda)
POUPANÇA	0,560	ISENTO
CDB	0,876	4% (sobre o ganho)

Para o jovem investidor, ao final de um mês, a aplicação mais vantajosa é:

3. (ENEM 2021) Um investidor deseja aplicar R\$ 10 000,00 durante um mês em um dos fundos de investimento de um banco. O agente de investimentos desse banco apresentou dois tipos de aplicações financeiras: a aplicação Básica e a aplicação Pessoal, cujas informações de rendimentos e descontos de taxas administrativas mensais são apresentadas no quadro.

Aplicação	Taxa de rendimento mensal	Taxa administrativa mensal
Básica	0,542%	R$ 0,30
Pessoal	0,560%	3,8% sobre o rendimento mensal

Consideradas as taxas de rendimento e administrativa, qual aplicação fornecerá maior valor de rendimento líquido a esse investidor e qual será esse valor?

4. (ENEM 2019) Uma pessoa se interessou em adquirir um produto anunciado em uma loja. Negociou com o gerente e conseguiu comprá-lo a uma taxa de juros compostos de 1% ao mês. O primeiro pagamento será um mês após a aquisição do produto, e no valor de R$ 202,00. O segundo pagamento será efetuado um mês após o primeiro, e terá o valor de R$ 204,02. Para concretizar a compra, o gerente emitirá uma nota fiscal com o valor do produto à vista negociado com o cliente, correspondendo ao financiamento aprovado.

O valor à vista, em real, que deverá constar na nota fiscal é de?

Anexo XVI - Situações problema sobre estatística.

1. Os valores dos salários dos funcionários de uma empresa estão representados na tabela a seguir:

Cargo	**Quantidade de funcionários**	**Salário**
Presidente	1	R$ 44.500,00
Gerentes	2	R$ 18.650,00
Supervisores	4	R$ 9.257,80
Consultores	80	R$ 3.525,00
Atendentes	2	R$ 1.980,27
Auxiliar de serviços gerais	1	R$ 1.212,00

Com base nos valores da tabela de salários dos funcionários da empresa, calcule:

a) A média salarial dessa empresa.

b) A mediana dos salários.

c) A moda dos salários.

2. Uma determinada região apresentou, nos últimos cinco meses, os seguintes valores (fornecidos em mm) para a precipitação pluviométrica média:

jun	jul	ago	set	out
32	34	27	29	28

Calcule a média, a mediana e a variância do conjunto de valores acima.

3. A nota final para uma disciplina de uma instituição de ensino superior é a média ponderada das notas A, B e C, cujos pesos são 1, 2 e 3, respectivamente. Paulo obteve A = 3,0 e B = 6,0. Quanto ele deve obter em C para que sua nota final seja 6,0?

Anexo XVII - Questões de vestibular estatística.

1. (ENEM 2022 PPL - Adaptada) A qualidade de sementes é verificada, entre outros fatores, pelo índice de germinação. Uma grande empresa afirma que o índice de germinação de suas sementes é de 90%. Essa empresa e dez pequenos produtores que formam uma cooperativa estão concorrendo a um auxílio financeiro que permitirá aumentar os negócios. Os cooperados querem preparar um documento técnico comparando a qualidade de suas sementes com as da empresa. Eles discutiram a possibilidade de colocar nesse documento frases como:

I – A média de germinação de nossas sementes é superior ao índice de germinação anunciado pela empresa.

II – A mediana de germinação de nossas sementes é superior ao índice de germinação anunciado pela empresa.

III – A média de germinação de nossas sementes é igual ao índice de germinação anunciado pela empresa.

IV – A moda de germinação de nossas sementes é igual ao índice de germinação anunciado pela empresa.

V – A mediana de germinação de nossas sementes é igual ao índice de germinação anunciado pela empresa.

Eles decidiram anotar a porcentagem de germinação das sementes de cada cooperado, analisar as frases e decidir qual era a correta para, então, colocá-la no documento.

As porcentagens anotadas foram 90%, 65%, 70%, 75%, 95%, 95%, 90%, 80%, 80% e 90%.

A frase a ser colocada no documento é a de número:

2. (ENEM 2022 PPL - Adaptada) Até a Copa de 2010, apenas sete jogadores haviam conseguido o feito de marcar 8 ou mais gols em uma mesma edição da Copa do Mundo. O quadro apresenta os anos das edições da copa nas quais ocorreram esses feitos, quais foram os jogadores que os realizaram e os respectivos números de gols marcados por cada um deles.

Ano	Nome do jogador	Número de gols marcados
1930	Guillermo Stábile	8
1950	Ademir de Menezes	9
1954	Sandor Kocsis	11
1958	Just Fontaine	13
1966	Eusébio	9
1970	Gerd Müller	10
2002	Ronaldo Nazário	8

Para facilitar a análise sobre a quantidade de gols marcados por esses artilheiros nas referidas copas, foi calculada a mediana da distribuição dos números de gols marcados por eles nas sete copas especificadas no quadro.

A mediana dessa distribuição é igual a?

3. (ENEM 2019 – Adaptada) O quadro apresenta a relação dos jogadores que fizeram parte da seleção brasileira de voleibol masculino nas Olimpíadas de 2012, em Londres, e suas respectivas alturas, em metro.

Nome	Altura (m)
Bruninho	1,90
Dante	2,01
Giba	1,92
Leandro Vissoto	2,11
Lucas	2,09
Murilo	1,90
Ricardinho	1,91
Rodrigão	2,05
Serginho	1,84
Sidão	2,03
Thiago Alves	1,94
Wallace	1,98

A mediana das alturas, em metro, desses jogadores é?

4. (ENEM 2019 – Adaptada) Um gerente decidiu fazer um estudo financeiro da empresa onde trabalha analisando as receitas anuais dos três últimos anos. Tais receitas são apresentadas no quadro.

Ano	Receita (bilhão de reais)
I	2,2
II	4,2
III	7,4

Estes dados serão utilizados para projetar a receita mínima esperada para o ano atual (ano IV), pois a receita esperada para o ano IV é obtida em função das variações das receitas anuais anteriores, utilizando a seguinte regra: a variação do ano IV para o ano III será igual à variação do ano III para o II adicionada à média aritmética entre essa variação e a variação do ano II para o I. O valor da receita mínima esperada, em bilhão de reais, será de?

5. **(Enem 2011 - Adaptada)** uma equipe de especialistas do centro meteorológico de uma cidade mediu a temperatura do ambiente, sempre no mesmo horário, durante 15 dias intercalados, a partir do primeiro dia de um mês. Esse tipo de procedimento é frequente, uma vez que os dados coletados servem de referência para estudos e verificação de tendências climáticas ao longo dos meses e anos.

As medições ocorridas nesse período estão indicadas no quadro:

Dia do mês	Temperatura (em °C)
1	15,5
3	14
5	13,5
7	18
9	19,5
11	20
13	13,5
15	13,5
17	18
19	20
21	18,5
23	13,5
25	21,5
27	20
29	16

Em relação à temperatura, os valores da moda, média e mediana são iguais a?

Anexo XVIII – Problemas de Probabilidade

1. (ENEM 2022) A *World Series* é a decisão do campeonato norte-americano de beisebol. Os dois times que chegam essa fase jogam, entre si, até sete partidas. O primeiro desses times que completar quatro vitórias é declarado Campeão.

Considere que, em todas as partidas, a probabilidade de qualquer um dos dois times vencer é sempre 1/2.

Qual é a probabilidade de o time campeão ser aquele que venceu a primeira partida da *World Series*?

2. (ENEM 2021) O organizador de uma competição de lançamento de dardos pretende tornar o campeonato mais competitivo. Pelas regras atuais da competição, numa rodada, o jogador lança 3 dardos e pontua caso acerte pelo menos um deles no alvo. O organizador considera que, em média, os jogadores têm, em cada lançamento, 1/2 de probabilidade de acertar um dardo no alvo.

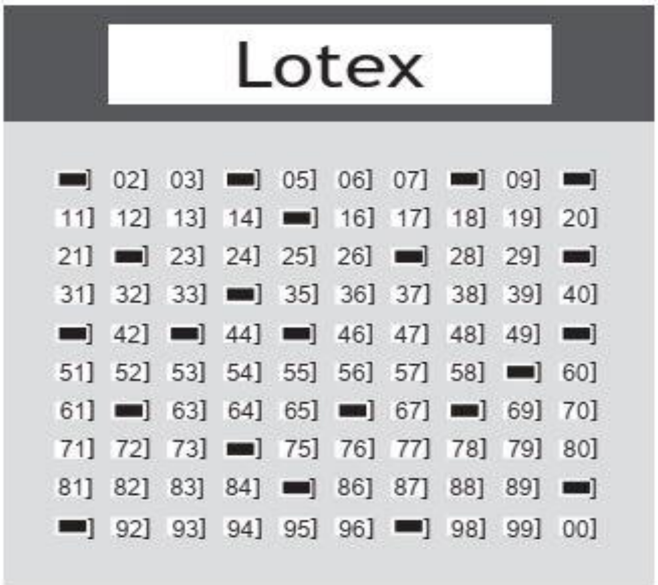
A fim de tornar o jogo mais atrativo, planeja modificar as regras de modo que a probabilidade de um jogador pontuar em uma rodada seja igual ou superior a 9/10. Para isso, decide aumentar a quantidade de dardos a serem lançados em cada rodada.

Com base nos valores considerados pelo organizador da competição, a quantidade mínima de dardos que devem ser disponibilizados em uma rodada para tornar o jogo mais atrativo é:

3. (ENEM 2022 PPL) A senha de um cofre é uma sequência formada por oito dígitos, que são algarismos escolhidos de 0 a 9. Ao inseri-la, o usuário se esqueceu dos dois últimos dígitos que formam essa senha, lembrando somente que esses dígitos são distintos.

Digitando ao acaso os dois dígitos esquecidos, a probabilidade de que o usuário acerte a senha na primeira tentativa é

4. (ENEM 2022 PPL) Na loteria Lotex, cada aposta corresponde à marcação de cinquenta números em um cartão. Caso o apostador marque uma quantidade inferior a cinquenta números, o sistema completará aleatoriamente a sua aposta até integralizar os cinquenta números necessários. Por exemplo, o cartão de aposta retratado representa as escolhas de um jogador antes que o sistema integralize o seu preenchimento.



Com relação ao cartão exibido, o jogador reconhece B que o número racional que corresponde ao quociente do número de pontos marcados pelo sistema, em seu jogo, C pelo número máximo de pontos para validar a aposta é igual a:

Anexo XIX – Problemas de Análise combinatória

1. (ENEM 2022) Uma montadora de automóveis divulgou que oferta a seus clientes mais de 1 000 configurações diferentes de carro, variando o modelo, a motorização, os opcionais e a cor do veículo. Atualmente, ela oferece 7 modelos de carros com 2 tipos de motores: 1.0 e 1.6. Já em relação aos opcionais, existem 3 escolhas possíveis: central multimídia, rodas de liga leve e bancos de couro, podendo o cliente optar por incluir um, dois, três ou nenhum dos opcionais disponíveis.

Para ser fiel à divulgação feita, a quantidade mínima de cores que a montadora deverá disponibilizar a seus clientes é

2. (ENEM 2022) Foram convidadas 32 equipes para um torneio de futebol, que foram divididas em 8 grupos com 4 equipes, sendo que, dentro de um grupo, cada equipe disputa uma única partida contra cada uma das demais equipes de seu grupo. A primeira e a segunda colocadas de cada grupo seguem para realizar as 8 partidas da próxima fase de torneio, chamada oitavas de final. Os vencedores das partidas das oitavas de final seguem para jogar as 4 partidas das quartas de final. Os vencedores das quartas de final disputam as 2 partidas das semifinais, e os vencedores avançam para a grande final, que define a campeã do treino.

Pelas regras do torneio, cada equipe deve ter um período de descanso de, no mínimo, 3 dias entre dois jogos por ela disputados, ou seja, se um time disputar uma partida, por exemplo, num domingo, só poderá disputar a partida seguinte a partir da quinta-feira da mesma semana.

O número mínimo de dias necessários para a realização desse torneio é

3. (ENEM 2021 PPL) Uma pessoa produzirá uma fantasia utilizando como materiais: 2 tipos de tecidos diferentes e 5 tipos distintos de pedras ornamentais. Essa pessoa tem à sua disposição 6 tecidos diferentes e 15 pedras ornamentais distintas.

A quantidade de fantasias com materiais diferentes que podem ser produzidas é representada por qual expressão?

4. (ENEM 2021 PPL) A prefeitura de uma cidade está renovando os canteiros de flores de suas praças. Entre as possíveis variedades que poderiam ser plantadas, foram escolhidas cinco: amor-perfeito, cravina, petúnia, margarida e lírio. Em cada um dos canteiros, todos com composições diferentes, serão utilizadas somente três variedades distintas, não importando como elas serão dispostas.

Um funcionário deve determinar os trios de variedades de flores que irão compor cada canteiro.

De acordo com o disposto, a quantidade de trios possíveis é dada por que expressão?

5. Uma lanchonete vende uma promoção de lanche a um preço único. No lanche, estão incluídos um sanduíche, uma bebida e uma sobremesa. São oferecidas três opções de sanduíches: hambúrguer especial, sanduíche vegetariano e cachorro-quente completo. Como opção de bebida, pode-se escolher 2 tipos: suco de maçã ou guaraná. Para a sobremesa, existem quatro opções: cupcake de cereja, cupcake de chocolate, cupcake de morango e cupcake de baunilha. Considerando todas as opções oferecidas, de quantas maneiras um cliente pode escolher o seu lanche?

6. É preciso escolher um representante e um vice representante de uma turma, com 20 alunos. Sendo que o mais votado será o representante e o segundo mais votado o vice representante.

7. De quantas maneiras diferentes 6 pessoas podem se sentar em um banco com 6 lugares?

8. Devemos escolher 3 membros para formar uma comissão organizadora de um evento, dentre 10 pessoas que se candidataram.

De quantas maneiras distintas essa comissão poderá ser formada?